ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

Π Α Ν Ε Π Ι Σ Τ Η Μ Ι Α Κ Ε Σ   Π Α Ρ Α Δ Ο Σ Ε Ι Σ
Γ Ι Α   Τ Ο   Μ Α Θ Η Μ Α

ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι
(Σειρές Fourier, μετασχηματισμός Fourier, μετασχηματισμός Laplace)

Ελευθέριος Αγγελής

Θεσσαλονίκη 1997

Πρόλογος

Οι σημειώσεις αυτές απευθύνονται στους φοιτητές 3ου εξαμήνου του τμήματος Πληροφορικής της Σχολής Θετικών Επιστημών του Α.Π.Θ. και περιλαμβάνουν το δεύτερο μέρος της ύλης του μαθήματος «Εφαρμοσμένα Μαθηματικά Ι» που αναφέρεται στην ανάλυση Fourier. Το πρώτο μέρος της ύλης του μαθήματος περιλαμβάνει τη μελέτη των μιγαδικών συναρτήσεων και των εφαρμογών τους. Ο στόχος των σημειώσεων είναι να παρουσιάσει τις βασικές έννοιες και ιδιότητες των σειρών Fourier και του μετασχηματισμού Fourier, μέσα από παραδείγματα κυρίως, χωρίς να γίνεται αναφορά στις αποδείξεις των θεωρημάτων, με μόνη εξαίρεση την όχι και τόσο αυστηρή απόδειξη κάποιων θεμελιωδών σχέσεων.

Η ύλη κατανέμεται σε τρία κεφάλαια. Στο πρώτο κεφάλαιο δίνονται αρχικά ορισμοί, ιδιότητες ολοκλήρωσης και παραδείγματα περιοδικών συναρτήσεων. Στη συνέχεια, δίνεται ο ορισμός των ορθογώνιων συναρτήσεων και ιδιαίτερα των τριγωνομετρικών και των εκθετικών μιγαδικών. Ακολουθεί η θεωρία των σειρών Fourier που περιλαμβάνει μεταξύ άλλων τον υπολογισμό των συντελεστών και συνθήκες ύπαρξης. Η θεωρία συνοδεύεται από πλήθος παραδειγμάτων για την καλύτερη κατανόηση των εννοιών. Στο δεύτερο κεφάλαιο δίνονται οι βασικές σχέσεις ορισμού και ιδιοτήτων του μετασχηματισμού Fourier. Στα παραδείγματα του κεφαλαίου αναφέρονται τρόποι γραφικής παράστασης των μετασχηματισμών Fourier αλλά και μετασχηματισμοί μερικών χρήσιμων συναρτήσεων. Στο τρίτο κεφάλαιο γίνεται μία πολύ σύντομη αναφορά στο μετασχηματισμό Laplace με σκοπό να φανεί η άμεση σχέση του με το μετασχηματισμό Fourier. Σημειώνεται ότι ο μετασχηματισμός Laplace με εφαρμογές στις διαφορικές εξισώσεις διδάσκεται εκτεταμένα στο μάθημα «Εφαρμοσμένα Μαθηματικά ΙΙ» του 4ου εξαμήνου.

1. ΣΕΙΡΕΣ FOURIER

1.1. Εισαγωγή

Στην ιστορική συνεδρίαση της Γαλλικής Ακαδημίας στις 21 Δεκεμβρίου του 1807, ο φυσικός και μαθηματικός Jean Baptiste Joseph Fourier (1768 - 1830) ανακοίνωσε τα αποτελέσματα μίας διατριβής η οποία εγκαινίασε ένα νέο κεφάλαιο στην ιστορία των μαθηματικών. Η εργασία είχε σαν κίνητρο τη μελέτη του φαινομένου της διάδοσης και διάχυσης της θερμότητας. Ο Fourier στην εργασία αυτή παρουσίασε ημιτονοειδείς σειρές οι οποίες μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την περιγραφή της κατανομής της θερμότητας σε ένα σώμα. Ισχυρίστηκε ακόμη ότι οποιαδήποτε συνάρτηση, ορισμένη σε κάποιο πεπερασμένο διάστημα, μπορεί πάντοτε να αναλυθεί σε άθροισμα καθαρά ημιτονοειδών και συνημιτονοειδών συναρτήσεων.

Ο ισχυρισμός αυτός του Fourier φάνηκε στα παλαιότερα μέλη της Ακαδημίας τελείως εξωπραγματικός. Η βασική αντίρρηση ήταν η εξής: Πώς μπορεί μία επαλληλία συναρτήσεων ημίτονων και συνημίτονων, που είναι από τις ιδιότητές της παντού παραγωγίσιμη (αναλυτική), να παραστήσει μία οποιαδήποτε συνάρτηση που μπορεί να παρουσιάζει ασυνέχειες; Ο διακεκριμένος μαθηματικός Lagrange ήταν ο μεγαλύτερος επικριτής του. Η ανένδοτη στάση του στην απόρριψη της εργασίας του Fourier οδήγησε στο να μείνουν τα αποτελέσματα και οι ισχυρισμοί του Fourier αδημοσίευτα επί 15 έτη. Το 1822 όμως, μετά από πολλές προσπάθειες, ο Fourier κατάφερε να δημοσιεύσει τις ανακαλύψεις του με τη μορφή βιβλίου με τίτλο *"Theorie analytique de la chaleur"* (Αναλυτική θεωρία της θερμότητας).

Στις έρευνες που ακολούθησαν, αποδείχτηκε ότι οι ισχυρισμοί του Fourier ήταν πλήρως δικαιολογημένοι παρόλο που ο ίδιος τους παρουσίασε ατελώς, επάνω σε διαισθητική κυρίως βάση και δε μπόρεσε να δώσει τις απαιτούμενες αποδείξεις, λόγω άγνοιας θεωρητικών εργαλείων για το χειρισμό άπειρων σειρών. Εδώ πρέπει να σημειωθεί ότι η ιδέα των τριγωνομετρικών σειρών δεν ήταν τελείως νέα την εποχή του Fourier. Είχαν ήδη χρησιμοποιηθεί από τον L. Euler (1748), τον D. Bernoulli (1753) και τον ίδιο τον Lagrange (1759) στη μελέτη των παλμικών κινήσεων της χορδής. Η χρησιμότητά τους όμως είχε κριθεί πολύ περιορισμένη.

Η ανακριβής από πλευράς αποδείξεων και συνθηκών θεωρία του Fourier θεμελιώθηκε κυρίως από τον P. L. Dirichlet το 1829 ο οποίος έδωσε ακριβείς συνθήκες για την παράσταση μίας περιοδικής συνάρτησης σαν "*σειρά Fourier*". Ο ίδιος ο Fourier παρόλο που δε συνέβαλε ουσιαστικά στη μαθηματική θεωρία των σειρών, επέκτεινε τη θεωρία σε μη περιοδικές συναρτήσεις με την μορφή του "*ολοκληρώματος Fourier*" που είναι και η πλέον σημαντική, πρωτότυπη και προσωπική του ανακάλυψη.

Οι γνωστές ως "σειρές Fourier" σύντομα αποτέλεσαν όχι μόνο έναυσμα για την εξαγωγή σπουδαίων σύγχρονων μαθηματικών αποτελεσμάτων αλλά και ισχυρότατο εργαλείο σε επιστήμες όπως η φυσική, η μηχανική και η ηλεκτρονική. Πράγματι, η δυνατότητα να αναλύονται όλες οι συνήθεις συναρτήσεις του φυσικού σύμπαντος σε ταλαντεύσεις ημίτονων και συνημίτονων είχε έντονο αντίκτυπο σε όλα τα κεφάλαια της μαθηματικής φυσικής. Φαινόμενα στα οποία η μέθοδοι του Fourier εφαρμόζονται περιλαμβάνουν προβλήματα ακουστικής, ελαστικότητας, οπτικής, ηλεκτρισμού, κ.ά.

Στο κεφάλαιο αυτό γίνεται μία στοιχειώδης παρουσίαση της θεωρίας των σειρών Fourier και των ιδιοτήτων τους μέσα από εφαρμογές κυρίως.

1.2. Περιοδικές συναρτήσεις

Η έννοια της περιοδικής συνάρτησης είναι θεμελιώδης στη θεωρία των σειρών Fourier. Στην παράγραφο αυτή θα δώσουμε τον ορισμό της περιοδικής συνάρτησης, τον τρόπο κατασκευής περιοδικής επέκτασης μιας συνάρτησης και βασικές ιδιότητες ολοκλήρωσης σε διάστημα μίας περιόδου. Ειδικότερα, θα ασχοληθούμε με τις ιδιότητες των τριγωνομετρικών συναρτήσεων και των μιγαδικών εκθετικών όπως και με τις μεταξύ τους σχέσεις.

1.2.1. Περιοδική συνάρτηση - περιοδική επέκταση συνάρτησης

Μία συνάρτηση $f(x)$ ονομάζεται **περιοδική** (*periodic function*) όταν για κάθε x ισχύει

$$f(x+T) = f(x)$$

όπου το T είναι θετική σταθερά. Η μικρότερη θετική τιμή του T ονομάζεται **θεμελιώδης περίοδος** ή **ελάχιστη περίοδος** ή απλά **περίοδος** (*period*). Η περιοδικότητα μίας συνάρτησης $f(x)$ με περίοδο Τ διαπιστώνεται γεωμετρικά εφόσον μία μετατόπιση της γραφικής της παράστασης κατά Τ μονάδες προς τα δεξιά οδηγεί πάλι στην ίδια γραφική παράσταση.

Αφού λοιπόν μία περιοδική συνάρτηση $f(x)$ με περίοδο Τ "επαναλαμβάνει" τον εαυτό της, μπορούμε να πούμε ότι ορίζεται πλήρως σε ένα μόνο διάστημα $a \le x < b$ μήκους $T = b - a$. Πράγματι, για κάθε $x' \notin [a,b)$ υπάρχει μία τιμή $x \in [a,b)$ τέτοια ώστε $x' - x = nT$ όπου το n είναι ένας ακέραιος αριθμός. Τότε είναι γνωστή και η τιμή $f(x') = f(x)$ (Σχήμα 1.1).

Αντίστροφα, μπορούμε πάντοτε να πάρουμε οποιαδήποτε συνάρτηση $f(x)$ ορισμένη σε διάστημα $a \le x < b$ και να κατασκευάσουμε την **περιοδική επέκτασή** της (*periodic extension*) επαναλαμβάνοντας τη συνάρτηση σε διαδοχικά διαστήματα μήκους $T = b - a$ (Σχήμα 1.2).

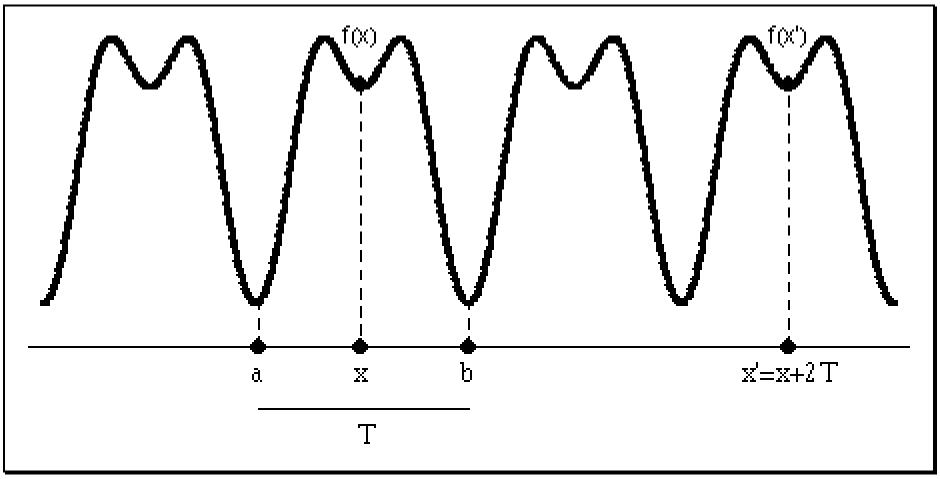
Όπως φαίνεται και από το Σχήμα 1.2., η περιοδική επέκταση μίας συνάρτησης δεν είναι αναγκαστικά συνεχής στα άκρα σημεία $x = a + nT = b + (n-1)T$ των διαδοχικών διαστημάτων μήκους Τ. Πρέπει λοιπόν να λάβουμε υπόψη και συναρτήσεις με ασυνέχειες σε μορφή "άλματος" σε σημεία $x = \xi$, που είναι συνεχείς από δεξιά και αριστερά του ξ αλλά όχι αναγκαστικά συνεχείς στο ίδιο το ξ. Σε ότι ακολουθεί θα χρησιμοποιήσουμε τους παρακάτω συμβολισμούς:

$$\boxed{f(\xi+)=\lim_{x\to\xi^+} f(x)} \qquad \text{και} \qquad \boxed{f(\xi-)=\lim_{x\to\xi^-} f(x)} \tag{1.1}$$

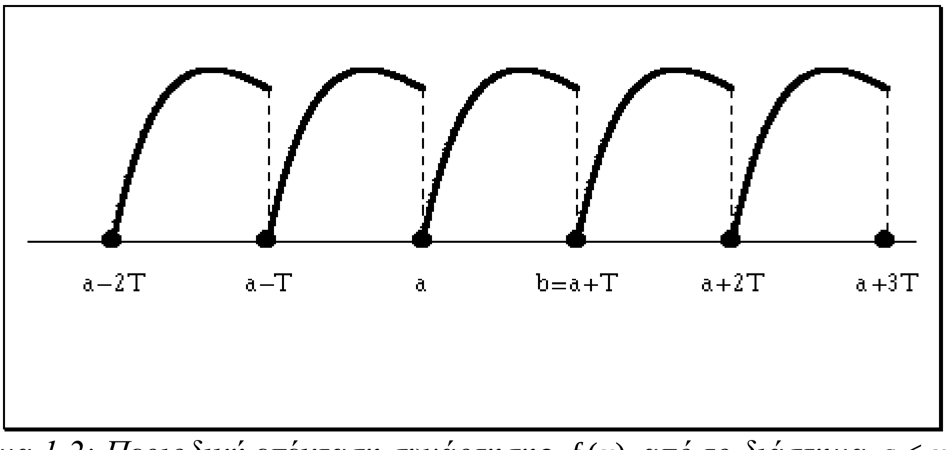
Όπως θα δούμε και παρακάτω, είναι βολικό σε κάθε σημείο ασυνέχειας ξ, να δίνουμε στη συνάρτηση (εξ' ορισμού) τη μέση τιμή

$$\boxed{f(\xi)=\frac{1}{2}\left[f(\xi+)+f(\xi-)\right]} \tag{1.2}$$

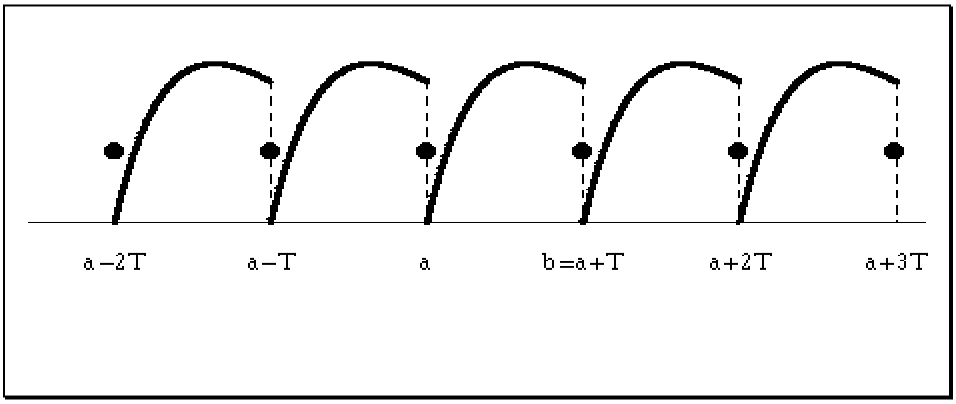
αψηφώντας την οποιαδήποτε αρχική τιμή $f(\xi)$. Με αυτή τη "διόρθωση" μπορούμε να ορίζουμε την επέκταση της αρχικής συνάρτησης από ένα κλειστό διάστημα $a \le x \le b$, περιοδικά για όλες τις τιμές του x ακόμη και για τις περιπτώσεις όπου $f(a) \ne f(b)$. Στις περιπτώσεις αυτές φροντίζουμε να ορίσουμε τη συνάρτηση έτσι ώστε στα άκρα κάθε διαστήματος να πάρει την τιμή $\frac{1}{2}\left[f(a)+f(b)\right]$ αντί για $f(a)$ και $f(b)$. Αυτό φαίνεται στο Σχήμα 1.3 όπου τα έντονα σημεία στη γραφική παράσταση δείχνουν τη νέα τιμή της συνάρτησης στα άκρα των διαστημάτων.



Σχήμα 1.1: Η γραφική παράσταση μίας περιοδικής συνάρτησης



Σχήμα 1.2: Περιοδική επέκταση συνάρτησης $f(x)$ από το διάστημα $a \le x < b$



Σχήμα 1.3: Αναθεώρηση του ορισμού της περιοδικής επέκτασης συνάρτησης στα σημεία ασυνέχειας

Θα δούμε αργότερα, ότι το ίδιο κάνουμε και στην περίπτωση που υπάρχουν πεπερασμένες ασυνέχειες (άλματα) και <u>μέσα</u> στο αρχικό διάστημα ορισμού της συνάρτησης. Ο λόγος που γίνεται αυτό είναι η ανάγκη για σύγκλιση της τριγωνομετρικής σειράς, στην οποία αναλύεται η συνάρτηση, σε ολόκληρο το διάστημα.

1.2.2. Παραδείγματα περιοδικών συναρτήσεων

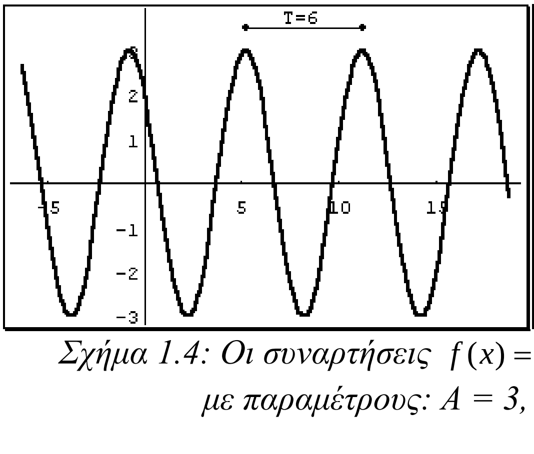
<u>Παράδειγμα 1.1.</u>

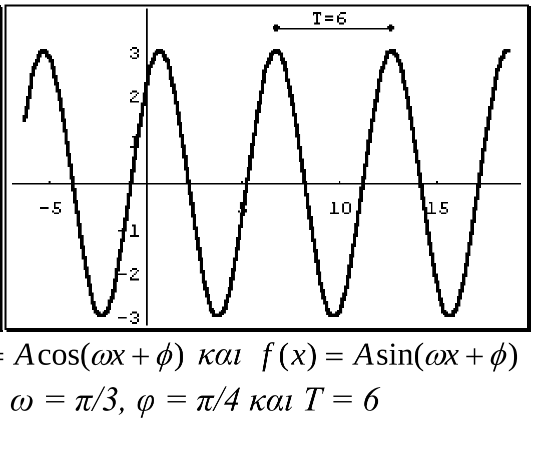
Η συνάρτηση $f(x) = A\cos(\omega x + \phi)$ είναι περιοδική με περίοδο $T = 2\pi/|\omega|$ αφού

$$f(x+T) = A\cos\{\omega(x+T)+\phi\} = A\cos\{\omega x + \phi \pm 2\pi\} = A\cos(\omega x + \phi)$$

Το ίδιο ισχύει και για τη συνάρτηση $f(x) = A\sin(\omega x + \phi)$.

Η γραφική παράσταση των συναρτήσεων αυτών για σταθερές τιμές των παραμέτρων τους δίνεται στο Σχήμα 1.4.





Σχήμα 1.4: Οι συναρτήσεις $f(x) = A\cos(\omega x + \phi)$ και $f(x) = A\sin(\omega x + \phi)$ με παραμέτρους: A = 3, ω = π/3, φ = π/4 και T = 6

Από τα προηγούμενα και από τη γνωστή σχέση του Euler (σχέση 1.9 παρακάτω) μπορούμε να δούμε εύκολα ότι και η μιγαδική συνάρτηση

$$f(x) = Ae^{i(\omega x+\phi)} = A[\cos(\omega x+\phi) + i\sin(\omega x+\phi)]$$

είναι περιοδική με περίοδο $T = 2\pi/|\omega|$.

<u>Παράδειγμα 1.2.</u>

Η συνάρτηση $f(x) = \cos\frac{x}{3} + \cos\frac{x}{4}$ είναι περιοδική με περίοδο *T=24π.*

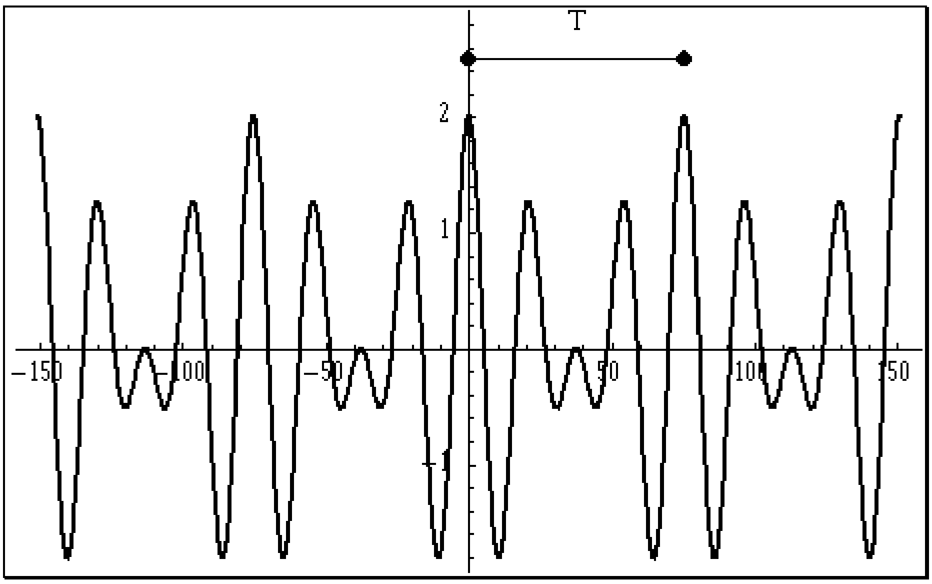
Πράγματι, πρέπει να ισχύει σύμφωνα με τον ορισμό:

$$\cos\frac{x+T}{3} + \cos\frac{x+T}{4} = \cos\frac{x}{3} + \cos\frac{x}{4}.$$

Αλλά αφού $\cos(\theta + 2k\pi) = \cos\theta$ για οποιοδήποτε ακέραιο *k*, πρέπει να υπάρχουν θετικοί ακέραιοι *m* και *n* έτσι ώστε:

$$\frac{1}{3}T = 2m\pi \quad \text{και} \quad \frac{1}{4}T = 2n\pi.$$

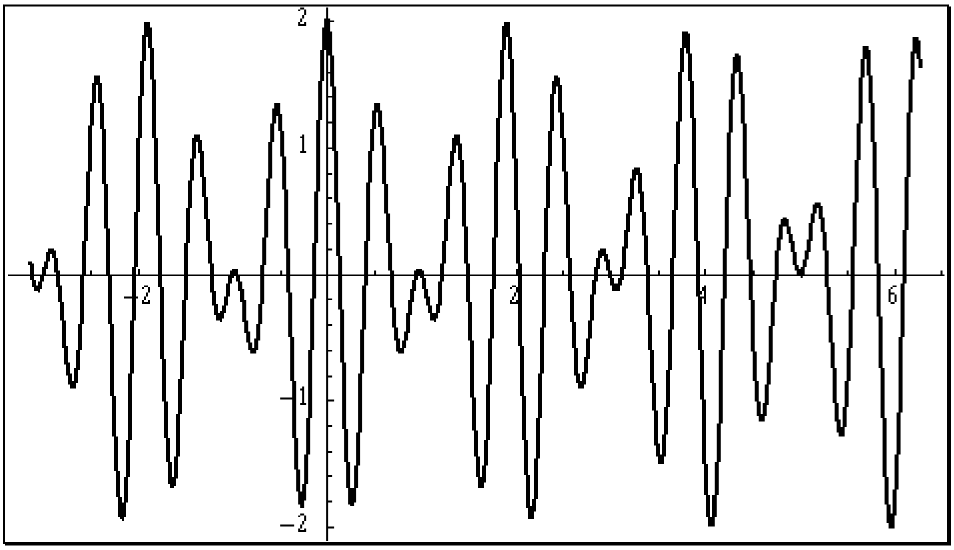
Οι μικρότεροι όμως θετικοί ακέραιοι που ικανοποιούν τις παραπάνω σχέσεις είναι *m=4* και *n=3*. Άρα *T=24π.*



Σχήμα 1.5: Γραφική παράσταση της $f(x) = \cos(x/3) + \cos(x/4)$

Γενικά, για να είναι περιοδική η συνάρτηση $f(x) = \cos\omega_1 x + \cos\omega_2 x$ πρέπει να υπάρχουν ακέραιοι *m* και *n* ώστε $\omega_1/\omega_2 = m/n$, δηλαδή ο λόγος ω_1/ω_2 πρέπει να είναι ρητός αριθμός.

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = \cos 10x + \cos(10+\pi)x$ στο Σχήμα 1.6 δεν είναι περιοδική.



Σχήμα 1.6: Γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \cos 10x + \cos(10+\pi)x$

Παράδειγμα 1.3.

Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(x) = e^{x/5}$ στο διάστημα $-\pi \le x \le \pi$, τότε μπορούμε εύκολα να ορίσουμε την περιοδική της επέκταση σε ολόκληρο το σύνολο των πραγματικών αριθμών επαναλαμβάνοντας το τμήμα αυτό της συνάρτησης σε διαδοχικά διαστήματα με μήκος $T = 2\pi$, έξω από το αρχικό διάστημα, έτσι ώστε να ισχύει η σχέση περιοδικότητας

$$f(x+nT) = f(x), \qquad n = \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Παρατηρούμε ότι στα άκρα των διαδοχικών διαστημάτων υπάρχει ασυνέχεια και επιπλέον ισχύει για $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$:

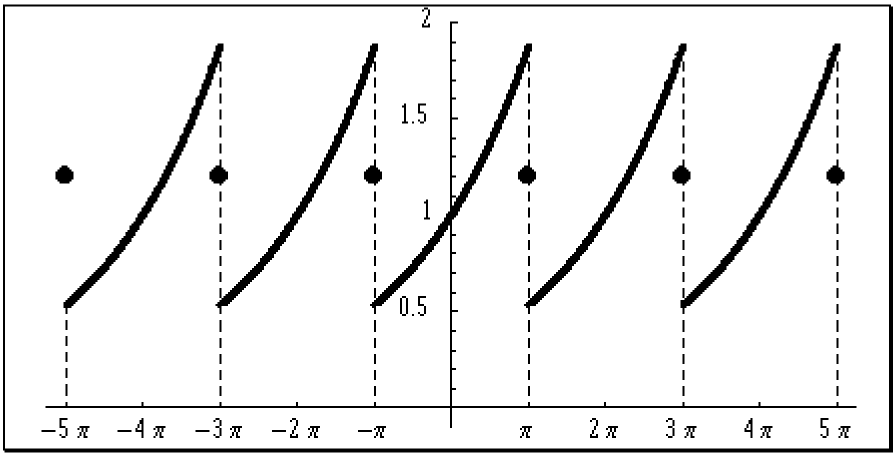
$$f\big((2k+1)\pi -\big) = \lim_{x \to (2k+1)\pi^-} f(x) = e^{\pi/5} (\approx 1.8745),$$

$$f\big((2k+1)\pi +\big) = \lim_{x \to (2k+1)\pi^+} f(x) = e^{-\pi/5} (\approx 0.5335)$$

Σύμφωνα λοιπόν με τα όσα αναφέραμε προηγουμένως, μπορούμε να ορίσουμε την περιοδική συνάρτηση έτσι ώστε να παίρνει σε κάθε άκρο διαστήματος την τιμή

$$f\big((2k+1)\pi\big) = \frac{1}{2}\left[e^{\pi/5} + e^{-\pi/5}\right] \approx 1.20397 .$$

Στο Σχήμα 1.7 βλέπουμε τον τρόπο με τον οποίο ορίζεται η περιοδική επέκταση της αρχικής συνάρτησης σε συνεχόμενα διαστήματα. Τα έντονα σημεία δείχνουν τη νέα τιμή της συνάρτησης στα σημεία ασυνέχειας.



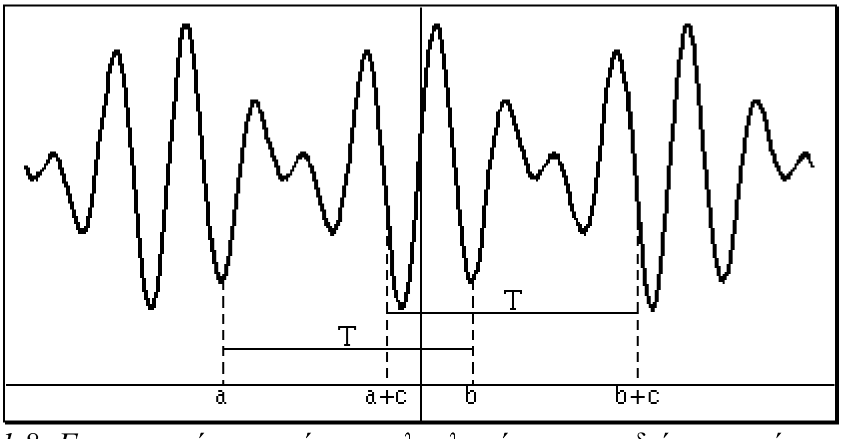
Σχήμα 1.7: Η περιοδική επέκταση της συνάρτησης $f(x)=e^{x/5}$, $-\pi \le x \le \pi$

1.2.3. Ολοκλήρωση των περιοδικών συναρτήσεων σε διάστημα περιόδου

Η γραφική παράσταση μίας περιοδικής συνάρτησης $f(x)$ με περίοδο Τ έχει ακριβώς το ίδιο σχήμα σε δύο διαδοχικά διαστήματα μήκους Τ. Για μία τέτοια συνάρτηση έχουμε την εξής βασική ιδιότητα:

Το ορισμένο ολοκλήρωμα μίας περιοδικής συνάρτησης σε διάστημα μήκους μίας περιόδου Τ, έχει πάντοτε την ίδια τιμή ανεξάρτητα με τη θέση του διαστήματος.

Η πρόταση γίνεται φανερή αν θυμηθούμε τη γεωμετρική ερμηνεία του ορισμένου ολοκληρώματος (εμβαδόν επιφάνειας κάτω από την καμπύλη της συνάρτησης). Έτσι στο Σχήμα 1.8 μπορούμε να δούμε καθαρά ότι οι δύο περιοχές κάτω από την καμπύλη: (α) από το σημείο x = a μέχρι το σημείο x = b = a + T και (β) από το σημείο x = a + c μέχρι το σημείο x = b + c έχουν το ίδιο ακριβώς εμβαδόν.



Σχήμα 1.8: Γεωμετρική ερμηνεία του ολοκληρώματος σε διάστημα μίας περιόδου

Η ιδιότητα αυτή μας δίνει τις παρακάτω πολύ χρήσιμες σχέσεις:

$$\int_{a-T/2}^{a+T/2} f(x)dx = \int_{a}^{a+T} f(x)dx = \int_{-T/2}^{T/2} f(x)dx = \int_{0}^{T} f(x)dx \qquad (1.3)$$

Επίσης εύκολα μπορεί να δειχτεί ότι ισχύει:

$$\int_{0}^{a} f(x)dx = \int_{T}^{a+T} f(x)dx \qquad (1.4)$$

1.2.4. Ορθογώνιες συναρτήσεις - ιδιότητες των ημιτονοειδών συναρτήσεων

Είναι γνωστό ότι δύο διανύσματα $\vec{A} = (A_1, A_2, A_3)$ και $\vec{B} = (B_1, B_2, B_3)$ ονομάζονται **κάθετα** ή **ορθογώνια** μεταξύ τους αν το εσωτερικό τους γινόμενο είναι μηδέν αν δηλαδή

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 = 0\,.$$

Η ιδιότητα αυτή μπορεί να επεκταθεί και στις συναρτήσεις, αν θεωρήσουμε μία συνάρτηση σαν διάνυσμα με άπειρες διαστάσεις. Σε μία τέτοια περίπτωση ορίζουμε σαν **ορθογώνιες** (*orthogonal*) δύο συναρτήσεις $A(x)$ και $B(x)$ στο διάστημα (a, b) αν ισχύει:

$$\boxed{\int_a^b A(x)B(x)dx = 0} \qquad (1.5)$$

Το αριστερό μέλος ονομάζεται συχνά εσωτερικό ή βαθμωτό γινόμενο των συναρτήσεων $A(x)$ και $B(x)$.

Ένα διάνυσμα $\vec{A} = (A_1, A_2, A_3)$ ονομάζεται **μοναδιαίο** αν το μήκος του είναι ίσο με τη μονάδα ή ισοδύναμα αν

$$\vec{A} \cdot \vec{A} = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 = 1$$

Επεκτείνοντας τον ορισμό στις συναρτήσεις, ονομάζουμε μία συνάρτηση $A(x)$ **κανονική** ή **κανονικοποιημένη** (*normalized*) στο διάστημα (a, b) αν

$$\boxed{\int_a^b \{A(x)\}^2 dx = 1} \qquad (1.6)$$

Ένα σύνολο συναρτήσεων $\{\ddot{o}_k(x)\}$, $k = 1, 2, 3, ...$με την ιδιότητα

$$\boxed{\int_a^b \phi_m(x)\phi_n(x)dx = \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & \mathrm{m} \neq \mathrm{n} \end{cases}} \qquad (1.7)$$

ονομάζεται **ορθοκανονικό σύνολο** (*orthonormal set*) στο διάστημα (a, b).

Με τον ίδιο τρόπο που ένα οποιοδήποτε διάνυσμα $\vec{A} = (A_1, A_2, A_3)$ μπορεί να εκφραστεί σαν γραμμικός συνδυασμός τριών μοναδιαίων διανυσμάτων $\vec{i}$, $\vec{j}$ και $\vec{k}$, ορθογώνιων μεταξύ τους, στη μορφή δηλαδή $\vec{A} = A_1\vec{i} + A_2\vec{j} + A_3\vec{k}$, έτσι και μία συνάρτηση $f(x)$ είναι δυνατό, κάτω από κάποιες συνθήκες, να εκφραστεί σαν γραμμικός συνδυασμός άπειρων ορθοκανονικών συναρτήσεων ή αλλιώς να αναπτυχθεί σε σειρά ορθοκανονικών συναρτήσεων.

Πολύ σημαντικές για τη θεωρία των σειρών Fourier είναι οι περιοδικές συναρτήσεις της μορφής $a_n \cos\left(\frac{2n\pi x}{T}\right)$ και $b_n \sin\left(\frac{2n\pi x}{T}\right)$, $n = 1,2,3,...$. Οι συναρτήσεις αυτές παριστούν τις λεγόμενες **αρμονικές ταλαντεύσεις** (*harmonic vibrations /oscillations*). Ο συντελεστής a_n ή b_n ονομάζεται **εύρος** (*amplitude*) και είναι η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει η συνάρτηση ενώ ο αριθμός $\omega_n = 2n\pi/T = n\omega_0$ είναι η **κυκλική** ή **γωνιακή συχνότητα** (circular/angular frequency). Ο αριθμός $\omega_0 = 2\pi/T$ ονομάζεται **θεμελιώδης κυκλική** ή **γωνιακή συχνότητα**. Η θεμελιώδης περίοδος της κάθε μίας από αυτές τις συναρτήσεις είναι *T/n* ενώ όλες έχουν κοινή περίοδο τον αριθμό T.

Ειδικότερα, σύμφωνα με τα όσα προαναφέραμε,

> Οι συναρτήσεις: $1, \sin\frac{2n\pi x}{T}, \cos\frac{2n\pi x}{T}$, $\mathrm{n} = 1, 2, 3, ...$ αποτελούν ένα ορθογώνιο σύνολο συναρτήσεων στο διάστημα (-T/2, T/2).

Πράγματι, αν χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις της τριγωνομετρίας

$$\sin A \cos B = \frac{1}{2}\{\sin(A-B) + \sin(A+B)\},$$

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2}\{\cos(A-B) + \cos(A+B)\},$$

$$\sin A \sin B = \frac{1}{2}\{\cos(A-B) - \cos(A+B)\}$$

και τα ορισμένα ολοκληρώματα

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin\frac{2k\pi x}{T} dx = -\frac{T}{2k\pi} \cos\frac{2k\pi x}{T}\Big|_{-T/2}^{T/2} = 0$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos\frac{2k\pi x}{T} dx = \frac{T}{2k\pi} \sin\frac{2k\pi x}{T}\Big|_{-T/2}^{T/2} = 0$$

θα έχουμε τις **σχέσεις ορθογωνιότητας** (*orthogonality conditions*):

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin\left(\frac{2n\pi x}{T}\right) dx = 0 \text{ για όλα τα n} \qquad (1.8\alpha)$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos\left(\frac{2n\pi x}{T}\right) dx = \begin{cases} 0, & n \neq 0 \\ T, & n = 0 \end{cases} \qquad (1.8\beta)$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin\left(\frac{2m\pi x}{T}\right) \sin\left(\frac{2n\pi x}{T}\right) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ T/2, & m = n \neq 0 \end{cases} \qquad (1.8\gamma)$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos\left(\frac{2m\pi x}{T}\right)\cos\left(\frac{2n\pi x}{T}\right)dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ T/2, & m = n \neq 0 \end{cases} \tag{1.8δ}$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin\left(\frac{2m\pi x}{T}\right)\cos\left(\frac{2n\pi x}{T}\right)dx = 0 \text{ για όλα τα m και n.} \tag{1.8ε}$$

Αν θέλουμε τώρα να κατασκευάσουμε ένα ορθοκανονικό σύστημα συναρτήσεων, από το προηγούμενο ορθογώνιο σύνολο, παρατηρούμε ότι το εσωτερικό γινόμενο κάθε συνάρτησης με τον εαυτό της στο διάστημα (-T/2, T/2) είναι:

$$\int_{-T/2}^{T/2} \{1\}^2 dx = T \qquad \text{και} \qquad \int_{-T/2}^{T/2} \cos^2 \frac{2n\pi x}{T} dx = \int_{-T/2}^{T/2} \sin^2 \frac{2n\pi x}{T} dx = \frac{T}{2}$$

οπότε το ζητούμενο ορθοκανονικό σύνολο θα είναι:

$$\frac{1}{\sqrt{T}}, \frac{1}{\sqrt{T/2}}\sin\frac{2n\pi x}{T}, \frac{1}{\sqrt{T/2}}\cos\frac{2n\pi x}{T}, \text{ n} = 1, 2, 3, \ldots$$

1.2.5. Σχέση τριγωνομετρικών - μιγαδικών συναρτήσεων

Οι πράξεις με τριγωνομετρικές συναρτήσεις συχνά απλουστεύονται πολύ με τη χρήση μιγαδικών αριθμών. Η σχέση που συνδέει τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις με τις μιγαδικές εκθετικής μορφής είναι η γνωστή **σχέση του Euler** :

$$\boxed{\cos\theta \pm i\sin\theta = e^{\pm i\theta}} \tag{1.9}$$

και οι παραγόμενες από αυτήν:

$$\boxed{\cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)} \tag{1.10}$$

και

$$\boxed{\sin\theta = \frac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right) = -\frac{1}{2}i\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)} \tag{1.11}$$

Η χρησιμότητα των μιγαδικών αριθμών φαίνεται κυρίως στην παραγώγιση και ολοκλήρωση ως προς τη μεταβλητή x αφού στις περιπτώσεις αυτές ο φανταστικός αριθμός i συμπεριφέρεται σαν πραγματική σταθερά. Ισχύει δηλαδή:

$$\frac{d}{dx} a e^{i\omega x} = i a \omega e^{i\omega x} \tag{1.12}$$

$$\int a e^{i\omega x} dx = \frac{a}{i\omega} e^{i\omega x} \tag{1.13}$$

Οι αντίστοιχες με τις σχέσεις ορθογωνιότητας (1.8α-ε) είναι στην περίπτωση των εκθετικών μιγαδικών συναρτήσεων:

$$\int_{-T/2}^{T/2} e^{i\frac{2n\pi x}{T}}\,dx = \begin{cases} 0, & n \neq 0 \\ T, & n = 0 \end{cases} \tag{1.14α}$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} e^{i\frac{2n\pi x}{T}} e^{-i\frac{2m\pi x}{T}}\,dx = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ T, & n = m \end{cases} \tag{1.14β}$$

Στη θεωρία των σειρών Fourier θα συναντήσουμε **τριγωνομετρικά πολυώνυμα** (*trigonometrical polynomials*) του τύπου

$$\boxed{S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}\left(a_n \cos(n\omega_0 x) + b_n \sin(n\omega_0 x)\right)} \tag{1.15}$$

Εφαρμόζοντας τις σχέσεις (1.10) και (1.11) η προηγούμενη έκφραση μπορεί να πάρει την απλούστερη μορφή

$$\boxed{S_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{in\omega_0 x}} \tag{1.16}$$

όπου οι νέοι συντελεστές c_n είναι μιγαδικοί αριθμοί και συνδέονται με τους πραγματικούς a_0, a_n και b_n μέσω των σχέσεων:

$$\begin{cases} c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \\ c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n) \qquad n = 1, 2, \ldots, N \\ c_0 = \frac{1}{2}a_0 \end{cases} \tag{1.17}$$

και

$$\begin{cases} a_n = c_n + c_{-n} \\ \qquad\qquad\qquad n = 0, 1, 2, \ldots, N \\ b_n = i(c_n - c_{-n}) \end{cases} \tag{1.18}$$

<u>Παράδειγμα 1.4.</u>

Με τη χρήση μιγαδικών αριθμών θα αποδείξουμε την ταυτότητα:

$$\sigma_{\mathrm{N}}(\theta) = \frac{1}{2} + \cos\theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos N\theta = \frac{\sin(N+\frac{1}{2})\theta}{2\sin\frac{1}{2}\theta} \tag{1.19}$$

όπου $\theta \neq 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi.$.

Πράγματι, αν εκφράσουμε τα συνημίτονα με τις εκθετικές μιγαδικές τους εκφράσεις από τη σχέση (1.10) θα πάρουμε:

$$\sigma_{\mathrm{N}}(\theta) = \frac{1}{2}\sum_{n=-N}^{N} e^{in\theta} = \frac{1}{2}\sum_{n=-N}^{N}\left(e^{i\theta}\right)^n = \frac{1}{2}\sum_{n=-N}^{N} q^n = \frac{1}{2}q^{-N}\sum_{n=0}^{2N} q^n \,.$$

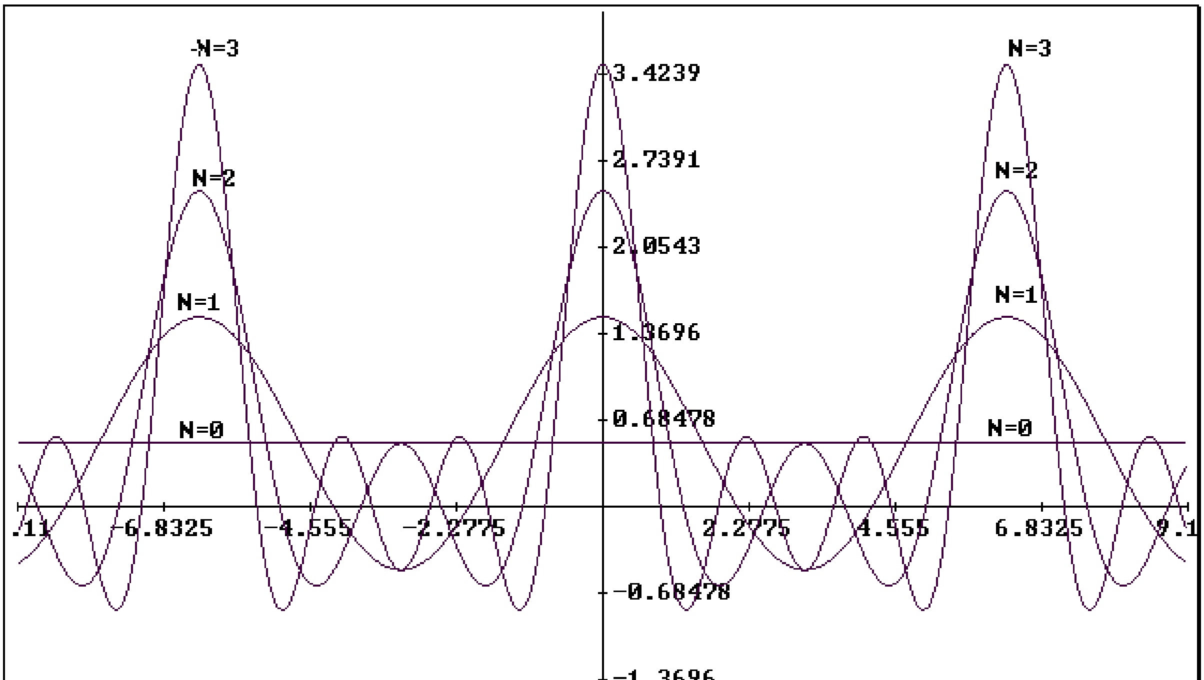
Θέτουμε δηλαδή $q = e^{i\theta}$ και έχουμε το άθροισμα των 2N πρώτων όρων γεωμετρικής προόδου. Άρα

$$\sigma_N(\theta) = \frac{1}{2} q^{-N} \left(\frac{1 - q^{2N+1}}{1 - q} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{-iN\theta} - e^{(N+1)i\theta}}{1 - e^{i\theta}}.$$

Αν πολλαπλασιάσουμε τώρα τον αριθμητή και τον παρονομαστή με $e^{-i\theta/2}$ θα προκύψει τελικά από τη σχέση (1.11) ότι:

$$\sigma_N(\theta) = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{-iN\theta - i\theta/2} - e^{(\nu+1)i\theta - i\theta/2}}{e^{-i\theta/2} - e^{i\theta/2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{-i(\nu+1/2)\theta} - e^{i(\nu+1/2)\theta}}{e^{-i\theta/2} - e^{i\theta/2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(N + \frac{1}{2})\theta}{\sin \frac{1}{2}\theta}.$$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $\sigma_{\mathrm{N}}(\theta) = \dfrac{\sin(N + \frac{1}{2})\theta}{2\sin \frac{1}{2}\theta}$ δεν ορίζεται στα σημεία στα οποία ο παρονομαστής μηδενίζεται, δηλαδή για $\theta = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$. Αν όμως την παραστήσουμε με το άθροισμα συνημίτονων της (1.19), μπορούμε να την ορίσουμε να παίρνει στα σημεία αυτά την τιμή $n + \frac{1}{2}$ οπότε είναι και συνεχής συνάρτηση του θ για όλα τα θ. Στο Σχήμα 1.9 μπορούμε να δούμε τη μορφή της συνάρτησης για N = 0 (οπότε είναι σταθερή συνάρτηση ίση με ½), N = 1, N = 2 και N = 3.



Σχήμα 1.9: Η συνάρτηση $\sigma_N(\theta)$ για N=0, 1, 2, 3

1.3. Σειρές Fourier

Ο αρχικός ισχυρισμός του Fourier ήταν ότι κάθε περιοδική συνάρτηση $f(x)$ με περίοδο *T*, μπορεί να παρασταθεί σαν ανάπτυγμα τριγωνομετρικής σειράς της μορφής

$$\boxed{f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{2n\pi x}{T} + b_n \sin\frac{2n\pi x}{T}\right)} \tag{1.20}$$

Στην πραγματικότητα, ο ισχυρισμός αυτός δεν είναι τελείως σωστός αφού για να συγκλίνει μία τέτοια σειρά πρέπει να ικανοποιούνται κάποιες συνθήκες συνέχειας που θα αναφέρουμε αργότερα. Παρά την ανακρίβεια αυτή όμως, το γεγονός είναι ότι οι σειρές αυτές είναι σε θέση να παραστήσουν ένα εξαιρετικά μεγάλο σύνολο περιοδικών συναρτήσεων που συναντώνται στις φυσικές επιστήμες. Συναρτήσεις οι οποίες δεν μπορούν να παρασταθούν από σειρές Fourier θεωρούνται γενικά “παθολογικές” και δεν θα εξεταστούν καθόλου στη συνέχεια.

Μία σειρά της μορφής (1.20) ονομάζεται **σειρά Fourier** (*Fourier series*) ή **ανάπτυγμα Fourier** (*Fourier expansion*) και οι συντελεστές της a_n και b_n, τους οποίους θα υπολογίσουμε στη συνέχεια με σχέσεις που εξαρτώνται από τη συνάρτηση $f(x)$, ονομάζονται **συντελεστές Fourier** (*Fourier coefficients*) ή **φασματικοί συντελεστές** (*spectral coefficients*).

1.3.1. Υπολογισμός των συντελεστών Fourier

Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι μία συνάρτηση $f(x)$, περιοδική με περίοδο T, μπορεί να παρασταθεί με μία σειρά της μορφής (1.20) ή ισοδύναμα ότι η σειρά στο δεξιό μέλος της (1.20) συγκλίνει σε μία συνάρτηση $f(x)$. Για τον υπολογισμό των συντελεστών Fourier θα χρησιμοποιήσουμε βασικά τις σχέσεις ορθογωνιότητας (1.8α)-(1.8ε). Τα βήματα που ακολουθούμε είναι τα εξής:

(α) Πολλαπλασιάζουμε την (1.20) με την ποσότητα $\cos\left(\frac{2m\pi x}{T}\right)$ και ολοκληρώνουμε τα δύο μέλη στο διάστημα (-T/2, T/2).

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos\left(\frac{2m\pi x}{T}\right)dx = \frac{1}{2}a_0\int_{-T/2}^{T/2}\cos\left(\frac{2m\pi x}{T}\right)dx$$

$$+\int_{-T/2}^{T/2}\left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2n\pi x}{T}\right)\right]\cos\left(\frac{2m\pi x}{T}\right)dx$$

$$+\int_{-T/2}^{T/2}\left[\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2n\pi x}{T}\right)\right]\cos\left(\frac{2m\pi x}{T}\right)dx$$

Εναλλάσσουμε τη σειρά της ολοκλήρωσης και της άθροισης

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos\left(\frac{2m\pi x}{T}\right)dx = \frac{1}{2}a_0\int_{-T/2}^{T/2}\cos\left(\frac{2m\pi x}{T}\right)dx$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{a_n}\int_{-T/2}^{\mathrm{T/2}}\cos\left(\frac{2n\pi x}{T}\right)\cos\left(\frac{2m\pi x}{T}\right)\mathrm{dx}$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{b_n}\int_{-T/2}^{\mathrm{T/2}}\sin\left(\frac{2n\pi x}{T}\right)\cos\left(\frac{2m\pi x}{T}\right)\mathrm{dx}$$

Από τις σχέσεις (1.8β), (1.8δ) και (1.8ε) παίρνουμε:

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos\left(\frac{2m\pi x}{T}\right)dx = \frac{\mathrm{T}}{2}a_m$$

και επομένως

$$a_m = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos\left(\frac{2m\pi x}{T}\right)dx \qquad (1.21)$$

(β) Ολοκληρώνουμε τη σχέση (1.20) στο (-T/2, T/2)

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(x)dx = \frac{1}{2}a_0\int_{-T/2}^{T/2}dx + \int_{-T/2}^{\mathrm{T/2}}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{a_n}\cos\left(\frac{2n\pi x}{T}\right)\right]\mathrm{dx} + \int_{-T/2}^{\mathrm{T/2}}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{b_n}\sin\left(\frac{2n\pi x}{T}\right)\right]\mathrm{dx}$$

εναλλάσσουμε την ολοκλήρωση και την άθροιση και από τις σχέσεις (1.8α) και (1.8β) παίρνουμε με τον ίδιο τρόπο

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)dx \qquad (1.22)$$

(γ) Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία, πολλαπλασιάζουμε τη σχέση (1.20) με $\sin\left(\frac{2m\pi x}{T}\right)$, ολοκληρώνουμε στο διάστημα (-T/2, T/2), εναλλάσσουμε τα αθροίσματα με τα ολοκληρώματα και τελικά παίρνουμε

$$b_m = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\sin\left(\frac{2m\pi x}{T}\right)dx \qquad (1.23)$$

Αν αντικαταστήσουμε στις σχέσεις (1.21), (1.22) και (1.23) το m με n τότε οι συντελεστές Fourier της σειράς (1.20) δίνονται από τις σχέσεις:

$$\boxed{a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos\left(\frac{2n\pi x}{T}\right)dx} \quad \text{και} \quad \boxed{b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\sin\left(\frac{2n\pi x}{T}\right)dx} \qquad (1.24)$$

για n = 0, 1, 2, ...

Ειδικά για την περίπτωση *n = 0,* $b_0 = 0$ και $\boxed{a_0 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)dx}$. Παρατηρούμε ότι η ποσότητα $a_0/2$ είναι η **μέση τιμή** της συνάρτησης σε διάστημα μίας περιόδου.

Οι συντελεστές a_n και b_n μπορούν να προσδιοριστούν και από τις σχέσεις

$$\boxed{a_n = \frac{2}{T}\int_c^{c+T} f(x)\cos\left(\frac{2n\pi x}{T}\right)dx} \quad \text{και} \quad \boxed{b_n = \frac{2}{T}\int_c^{c+T} f(x)\sin\left(\frac{2n\pi x}{T}\right)dx} \qquad (1.25)$$

όπου c αυθαίρετη πραγματική σταθερά. Αυτό σημαίνει ότι η ολοκλήρωση μπορεί να γίνει σε οποιοδήποτε διάστημα μήκους T και αυτό συμφωνεί με τα όσα αναφέραμε στην Παράγραφο 1.2. Παρατηρούμε ακόμη ότι οι σχέσεις (1.24) είναι ειδική περίπτωση των σχέσεων (1.25) αν θέσουμε $c = -T/2$.

1.3.2. Συνθήκες Dirichlet

Σε όσα αναφέραμε προηγουμένως, δεχτήκαμε ότι κάθε περιοδική συνάρτηση μπορεί να εκφραστεί σαν τριγωνομετρική σειρά. Στην πραγματικότητα, υπάρχουν συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούνται ώστε η σειρά της (1.20) να συγκλίνει στην $f(x)$.

Αναφέρουμε τις γνωστές ως **συνθήκες Dirichlet** (από τις έρευνες του μαθηματικού Peter Lejeune-Dirichlet (1829)) κάτω από τις οποίες είναι δυνατή η έκφραση μίας περιοδικής συνάρτησης με περίοδο T σαν ανάπτυγμα Fourier.

(1) Σε οποιοδήποτε διάστημα μίας περιόδου η $f(x)$ πρέπει να είναι **απόλυτα ολοκληρώσιμη**, δηλαδή πρέπει

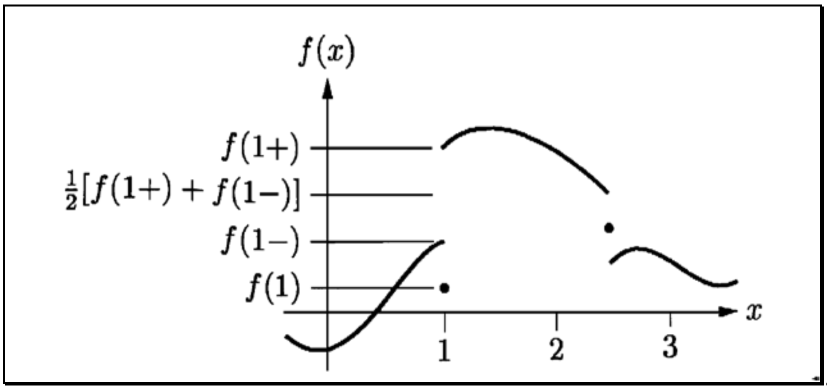
$$\int_c^{c+T} |f(x)|dx < \infty . \qquad (1.26)$$

(2) Σε οποιοδήποτε διάστημα μίας περιόδου η $f(x)$ πρέπει να έχει πεπερασμένο αριθμό μεγίστων και ελαχίστων .

(3) Σε οποιοδήποτε διάστημα μίας περιόδου πρέπει να υπάρχει πεπερασμένος αριθμός σημείων ασυνέχειας και επιπλέον η ασυνέχεια σε αυτά τα σημεία να είναι πεπερασμένη (δηλαδή αν ξ είναι σημείο ασυνέχειας, τα όρια της συνάρτησης $f(\xi+) = \lim_{x\to\xi^+} f(x)$ *από δεξιά* και $f(\xi-) = \lim_{x\to\xi^-} f(x)$ *από αριστερά* πρέπει να είναι πεπερασμένα χωρίς να είναι αναγκαστικά ίσα).

Αν ικανοποιούνται οι συνθήκες του Dirichlet, τότε η σειρά Fourier της (1.20) με συντελεστές που δίνονται από τις σχέσεις (1.24) ή (1.25) συγκλίνει στην $f(x)$ για κάθε σημείο συνέχειας, ενώ για κάθε σημείο πεπερασμένης ασυνέχειας συγκλίνει στην ποσότητα $\dfrac{f(x+) + f(x-)}{2}$.

Οι συναρτήσεις που ικανοποιούν τις συνθήκες (2) και (3) λέγονται **τμηματικά συνεχείς** (*piecewise continuous*) συναρτήσεις και είναι συναρτήσεις συνεχείς που όμως παρουσιάζουν μεμονωμένες ασυνέχειες με τη μορφή "αλμάτων" όπως φαίνεται και στο Σχήμα 1.10 όπου η $f(x)$ παρουσιάζει ασυνέχειες πεπερασμένες (άλματα) στα σημεία x=1 και x=2.5.



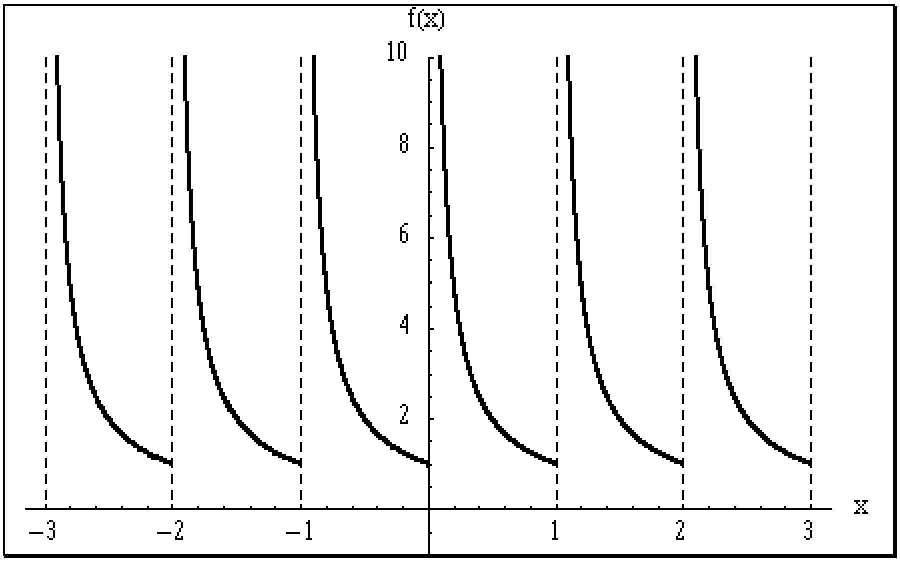
Σχήμα 1.10: Τμηματικά συνεχής συνάρτηση

Γενικά, οι συναρτήσεις που προκύπτουν σε εφαρμογές ικανοποιούν τις συνθήκες Dirichlet. Παραδείγματα συναρτήσεων που δεν ικανοποιούν μία τουλάχιστον από τις συνθήκες είναι:

(1) Η περιοδική επέκταση της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{1}{x}$ με αρχικό διάστημα $0<x\leq 1$ και περίοδο $T=1$ δεν ικανοποιεί την πρώτη συνθήκη Dirichlet γιατί

$$\int_0^T |f(x)|dx = \int_0^1 \frac{1}{x}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\ln x\Big|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to 0}(-\ln\varepsilon) = \infty .$$

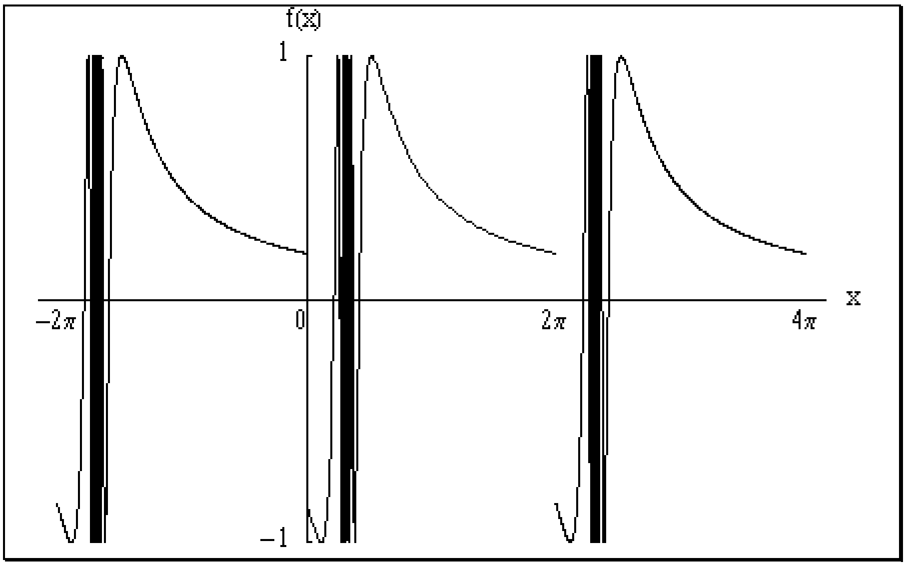
Η γραφική παράσταση της συνάρτησης δίνεται στο Σχήμα 1.11.



Σχήμα 1.11: Η συνάρτηση $f(x)=1/x,\ 0<x\leq 1,\ T=1$

(2) Η συνάρτηση $\sin\left(\dfrac{1}{x-1}\right)$ στο διάστημα $0<x<2\pi$ με περίοδο Τ = 2π δεν ικανοποιεί τη δεύτερη συνθήκη Dirichlet αφού έχει άπειρο αριθμό ελάχιστων και μέγιστων τιμών στην περιοχή του 1. Αυτό συμβαίνει γιατί για κάθε ακέραιο

αριθμό k υπάρχει μέγιστο στο σημείο $x = 1 + \dfrac{2}{4k+1}$ και ελάχιστο στο σημείο $x = 1 + \dfrac{2}{4k+3}$, όλα στην περιοχή του 1. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης δίνεται στο Σχήμα 1.12.

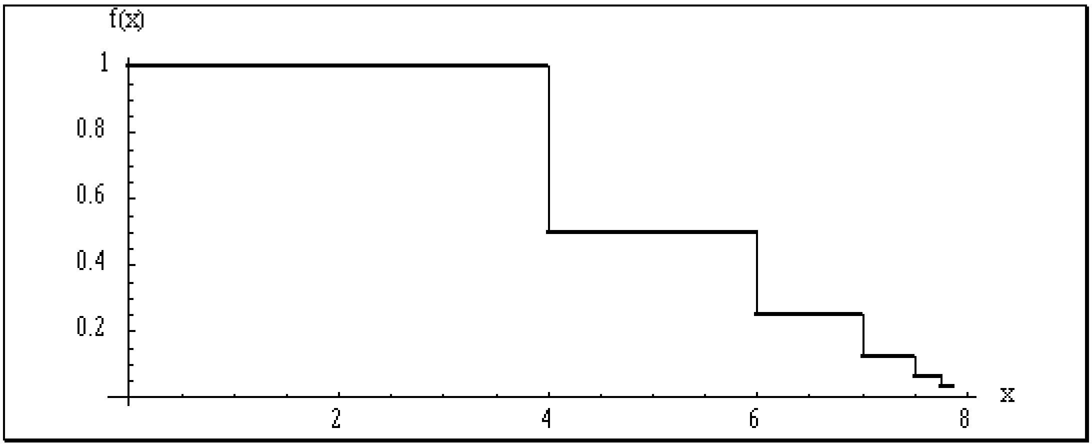


Σχήμα 1.12: Η συνάρτηση $\sin(1/(x-1))$, $0 < x < 2\pi$, *T = 2π*

(3) Έστω η συνάρτηση με περίοδο T=8 που ορίζεται στο διάστημα $0 \le x < 8$ με τον ακόλουθο τρόπο:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x < 4 \\ 1/2 & 4 \le x < 6 \\ 1/4 & 6 \le x < 7 \\ 1/8 & 7 \le x < 7.5 \\ 1/16 & 7.5 \le x < 7.75 \\ 1/32 & 7.75 \le x < 7.875 \\ & \cdots \end{cases}$$

δηλαδή, κάθε φορά που η απόσταση του x από το 8 ελαττώνεται κατά έναν παράγοντα του 2, η τιμή της συνάρτησης ελαττώνεται επίσης κατά έναν παράγοντα του 2. Η $f(x)$ έχει άπειρο αριθμό σημείων ασυνέχειας και επομένως δεν ικανοποιεί την τρίτη συνθήκη Dirichlet. Η γραφική της παράσταση δίνεται μόνο για το διάστημα $0 \le x < 8$ στο Σχήμα 1.13.



Σχήμα 1.13: Συνάρτηση με άπειρα σημεία ασυνέχειας σε διάστημα μίας περιόδου

1.3.3. Μιγαδική μορφή της σειράς Fourier

Σύμφωνα με όσα αναφέραμε στην Παράγραφο 1.1 για τη σχέση των τριγωνομετρικών συναρτήσεων με τις μιγαδικές εκθετικές συναρτήσεις και την ισοδύναμη παράσταση τριγωνομετρικών πολυωνύμων και μιγαδικών εκθετικών (σχέσεις (1.15), (1.16) και (1.17)), οι σειρές Fourier μπορούν να εκφραστούν σαν σειρές με εκθετικές μιγαδικές συναρτήσεις. Οι σχέσεις δηλαδή (1.20), (1.24) και (1.25) που δίνουν τη σειρά και τους συντελεστές Fourier μίας περιοδικής συνάρτησης με περίοδο T μπορούν να γραφούν και ως εξής:

$$\boxed{f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{2n\pi x}{T}}} \qquad \text{όπου} \qquad \boxed{c_n=\frac{1}{T}\int_c^{c+T} f(x)e^{-i\frac{2n\pi x}{T}}dx} \tag{1.27}$$

Εννοείται ότι και εδώ η συνάρτηση αρκεί να ικανοποιεί τις συνθήκες Dirichlet έτσι ώστε να συγκλίνει η σειρά. Σε σημείο πεπερασμένης ασυνέχειας η σειρά Fourier συγκλίνει και εδώ στην ποσότητα $\frac{f(x+)+f(x-)}{2}$.

1.3.4. Παραδείγματα σειρών Fourier

Στη συνέχεια δίνουμε παραδείγματα ανάπτυξης περιοδικών συναρτήσεων σε σειρές Fourier. Η συνάρτηση δίνεται με τύπο σε ένα αρχικό διάστημα μήκους μίας περιόδου και στη συνέχεια ο ορισμός της επεκτείνεται περιοδικά και έξω από το διάστημα αυτό. Ακόμη δεχόμαστε, χωρίς να αποδεικνύουμε κάθε φορά, ότι οι συναρτήσεις στα παραδείγματα ικανοποιούν τις συνθήκες Dirichlet και επομένως η σειρά Fourier συγκλίνει πάντοτε.

<u>Παράδειγμα 1.5.</u>

Δίνεται η συνάρτηση:

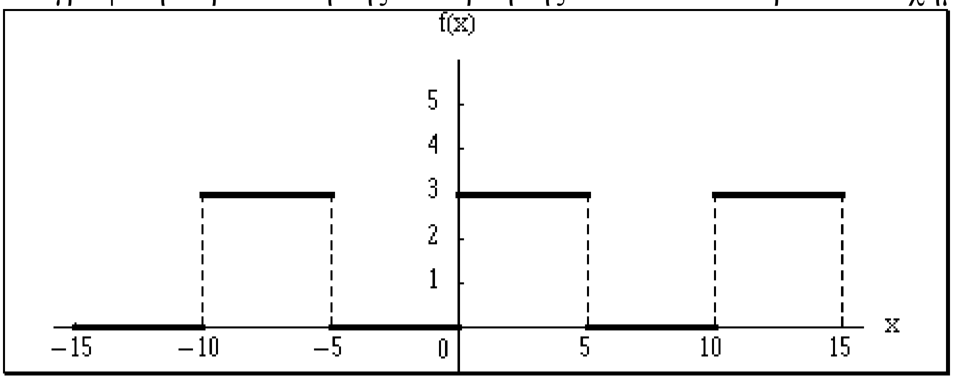
$$f(x)=\begin{cases}0, & -5<x<0\\ \\ 3, & 0<x<5\end{cases} \qquad \text{Περίοδος: } T = 10.$$

(i) Να υπολογιστούν οι συντελεστές Fourier της συνάρτησης,

(ii) να βρεθεί η αντίστοιχη σειρά Fourier και

(iii) να οριστεί η $f(x)$ στα σημεία -5, 0 και 5 ώστε να συγκλίνει η σειρά Fourier σε ολόκληρο το διάστημα $-5 \le x \le 5$.

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης δίνεται στο παρακάτω σχήμα



Σχήμα 1.14: Η περιοδική επέκταση της συνάρτησης του Παραδείγματος 1.5

(i) Εφαρμόζοντας τις σχέσεις (1.24) με T=10, έχουμε:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos\left(\frac{2n\pi x}{T}\right)dx = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{5}\right)dx$$

$$= \frac{1}{5}\left\{\int_{-5}^{0} 0\cdot\cos\left(\frac{n\pi x}{5}\right)dx + \int_{0}^{5} 3\cdot\cos\left(\frac{n\pi x}{5}\right)dx\right\} = \frac{3}{5}\int_{0}^{5}\cos\left(\frac{n\pi x}{5}\right)dx =$$

$$= \frac{3}{5}\left(\frac{5}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi x}{5}\right)\right)\Bigg|_{0}^{5} = 0, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Για n=0 : $a_0 = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} f(x)dx = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5} f(x)dx = \frac{1}{5}\left\{\int_{-5}^{0} 0\cdot dx + \int_{0}^{5} 3\cdot dx\right\} = 3$

Επίσης,

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\sin\left(\frac{2n\pi x}{T}\right)dx = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{5}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{5}\left\{\int_{-5}^{0} 0\cdot\sin\left(\frac{n\pi x}{5}\right)dx + \int_{0}^{5} 3\cdot\sin\left(\frac{n\pi x}{5}\right)dx\right\} = \frac{3}{5}\int_{0}^{5}\sin\left(\frac{n\pi x}{5}\right)dx$$

$$= \frac{3}{5}\left(-\frac{5}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{5}\right)\right)\Bigg|_0^5 = \frac{3(1-\cos n\pi)}{n\pi}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

(ii) Η σειρά Fourier της συνάρτησης είναι:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2n\pi x}{T}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2n\pi x}{T}\right) = \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3(1-\cos n\pi)}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{5}$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{6}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}\sin\left(\frac{(2k-1)\pi x}{5}\right) = \frac{3}{2} + \frac{6}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{5} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{5} + \frac{1}{5}\sin\frac{5\pi x}{5} + \cdots\right)$$

αφού cosnπ = 1 αν n είναι άρτιος και -1 αν n περιττός.

(iii) Η $f(x)$ ικανοποιεί στα διαστήματα (-5, 0) και (0, 5) τις συνθήκες Dirichlet και επομένως η σειρά Fourier συγκλίνει στην $f(x)$ σε όλα τα σημεία συνέχειας. Στα σημεία πεπερασμένης ασυνέχειας x = -5, 0, 5, όπου εμφανίζει άλματα, θα συγκλίνει στην ποσότητα $\frac{f(x+)+f(x-)}{2}$. Και για τα τρία σημεία αυτή η ποσότητα είναι 3/2.

Πράγματι,

$$f\big((-5)+\big) = \lim_{x\to -5^+} f(x) = 0, \qquad f\big((-5)-\big) = \lim_{x\to -5^-} f(x) = 3$$

και επομένως

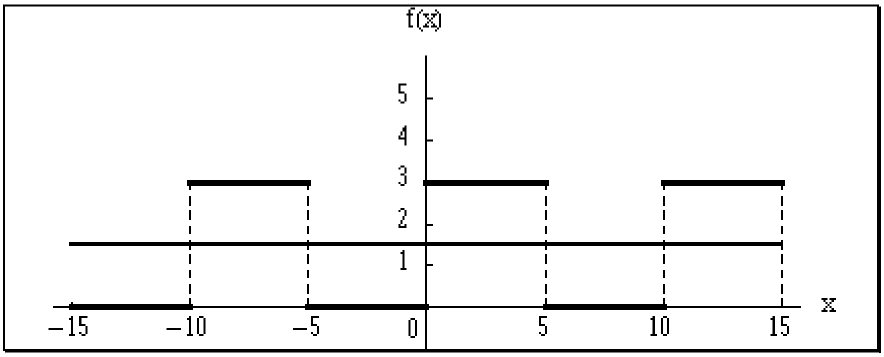
$$\frac{f\big((-5)+\big) + f\big((-5)-\big)}{2} = \frac{0+3}{2} = \frac{3}{2}.$$

Όμοια έχουμε:

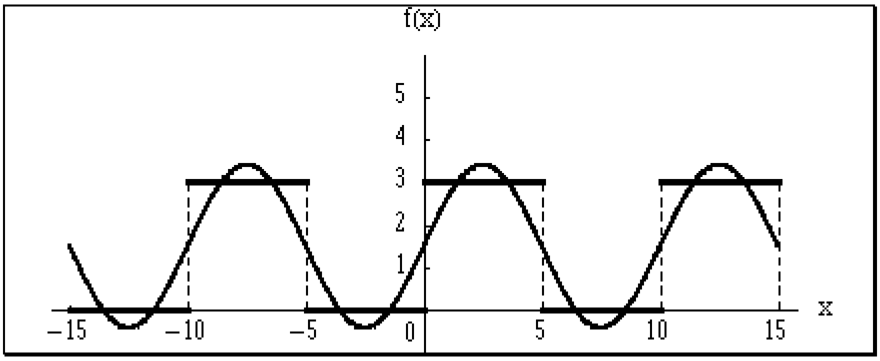
$$\frac{f(0+)+f(0-)}{2} = \frac{3+0}{2} = \frac{3}{2} \qquad \text{και} \qquad \frac{f(5+)+f(5-)}{2} = \frac{0+3}{2} = \frac{3}{2}$$

Επομένως για να συγκλίνει η σειρά Fourier σε όλο το [-5, 5] θα πρέπει να οριστεί η $f(x)$:

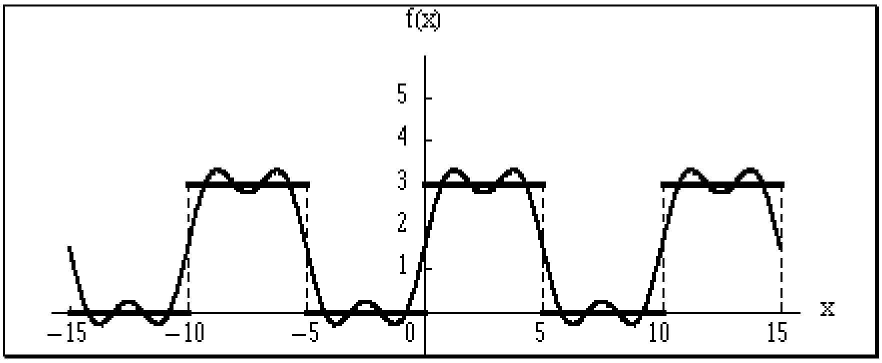
$$f(x) = \begin{cases} 3/2, & x = -5 \\ 0, & -5 < x < 0 \\ 3/2, & x = 0 \\ 3, & 0 < x < 5 \\ 3/2, & x = 5 \end{cases}$$



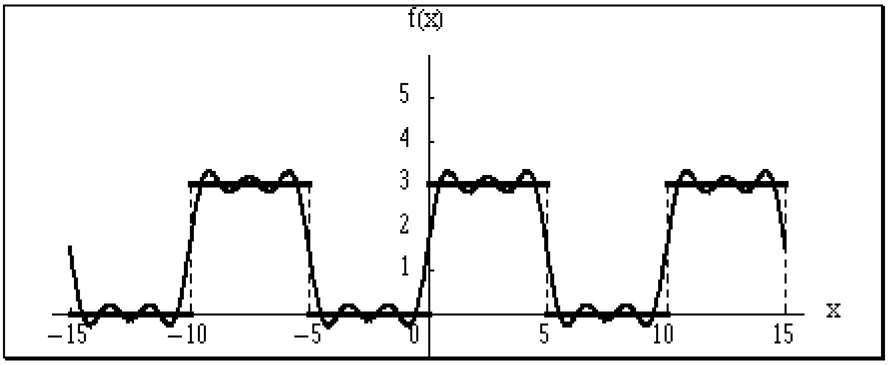
(α) $f(x)$ και προσέγγιση από την ευθεία 3/2 (μέση τιμή)



(β) $f(x)$ και προσέγγιση από την (3/2) + (6/π)sin(πx/5)



(γ) $f(x)$ και προσέγγιση από την (3/2) + (6/π)(sin(πx/5)+(1/3)sin(3πx/5))



(δ) $f(x)$ και προσέγγιση από την (3/2) + (6/π)(sin(πx/5)+(1/3)sin(3πx/5)+(1/5)sin(5πx/5))

Σχήμα 1.15: Διαδοχικές προσεγγίσεις της $f(x)$ από όρους της σειράς Fourier

Στο Σχήμα 1.15 δίνονται διαδοχικές προσεγγίσεις της $f(x)$ από τριγωνομετρικά πολυώνυμα της μορφής

$$S_N(x) = \frac{3}{2} + \frac{6}{\pi}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2k-1}\sin\left(\frac{(2k-1)\pi x}{5}\right)$$

για N = 0 (μέση τιμή = 3/2), N = 1, N = 2 και N = 3. Παρατηρούμε ότι όσο το $N \to \infty$, τα πολυώνυμα "πλησιάζουν" περισσότερο τη συνάρτηση. Αλλά το όριο της ακολουθίας $S_N(x)$ όταν $N \to \infty$ είναι από τον ορισμό της η σειρά Fourier που βρήκαμε προηγουμένως. Με τον τρόπο αυτό γίνεται κατανοητή η σύγκλιση της σειράς Fourier στην αντίστοιχη συνάρτηση.

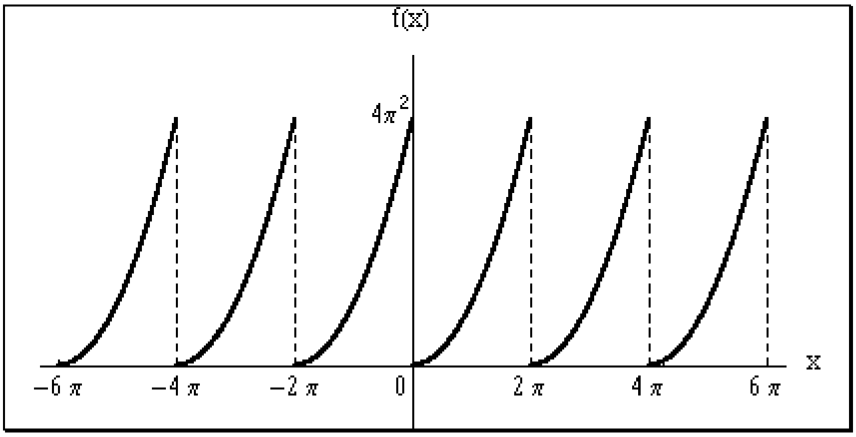
<u>Παράδειγμα 1.6.</u>

(i) Να αναπτυχθεί η περιοδική επέκταση της συνάρτησης $f(x) = x^2$ με αρχικό διάστημα $0 < x < 2\pi$ σε σειρά Fourier. Η περίοδος είναι *T = 2π.*

(ii) Χρησιμοποιώντας το *(i)* να αποδειχτεί ότι:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Η γραφική παράσταση της περιοδικής επέκτασης της συνάρτησης δίνεται στο Σχήμα 1.16.



Σχήμα 1.16: Η περιοδική επέκταση της συνάρτησης του Παραδείγματος 1.6

(i) Στο παράδειγμα αυτό θα χρησιμοποιήσουμε τους τύπους (1.27) της μιγαδικής μορφής της σειράς Fourier, οπότε θα έχουμε για Τ = 2π και c = 0:

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)e^{-i\frac{2n\pi x}{T}}dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^2 e^{-inx}dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{i}{n}x^2 e^{-inx} + \frac{2}{n^2}xe^{-inx} - \frac{2i}{n^3}e^{-inx}\right\}\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{2}{n}\left(\frac{1}{n} + i\pi\right)$$

Παρατηρούμε ότι εδώ η ολοκλήρωση γίνεται με όρια 0 και 2π. Το ολοκλήρωμα υπολογίζεται εύκολα εφαρμόζοντας κατά παράγοντες ολοκλήρωση δύο φορές. Επίσης πρέπει να λάβουμε υπόψη ότι αφού cos2nπ = 1 και sin2nπ = 0 θα ισχύει $e^{-i2n\pi} = 1$ για όλα τα n.

Ειδικά για *n* = 0, $c_0 = \frac{1}{T}\int_0^{2\pi} f(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^2 dx = \frac{4\pi^2}{3}$.

Επομένως, η ανάπτυξη σε σειρά Fourier της συνάρτησης θα είναι

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{inx}=\frac{4\pi^2}{3}+\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{2}{n}\left(\frac{1}{n}+i\pi\right)e^{inx}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}\left(\frac{1}{n}+i\pi\right)e^{inx}=$$
$$=\frac{4\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{2}{n}\left(-\frac{1}{n}+i\pi\right)e^{-inx}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}\left(\frac{1}{n}+i\pi\right)e^{inx}=$$
$$=\frac{4\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{2}{n^2}(e^{inx}+e^{-inx})+\frac{2i\pi}{n}(e^{inx}-e^{-inx})\right\}.$$

Από τη σχέση του Euler (1.9) και τις παραγόμενες σχέσεις (1.10) και (1.11) μπορούμε εύκολα να δούμε ότι

$$f(x)=\frac{4\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n^2}\cos nx-\frac{4\pi}{n}\sin nx\right).$$

Εδώ πρέπει να σημειώσουμε ότι η παραπάνω σειρά συγκλίνει στη συνάρτηση $f(x)$ σε όλα τα σημεία των διαδοχικών διαστημάτων

$$\ldots,\ -4\pi<x<-2\pi,\ -2\pi<x<0,\ 0<x<2\pi,\ 2\pi<x<4\pi,\ \ldots .$$

Στα σημεία ασυνέχειας

$$x=\ldots,\ -4\pi,\ -2\pi,\ 0,\ 2\pi,\ 4\pi,\ \ldots$$

η σειρά συγκλίνει στην ποσότητα

$$\frac{f(x+)+f(x-)}{2}=\frac{0+4\pi^2}{2}=2\pi^2$$

Για το λόγο αυτό είναι βολικό να ορίσουμε την περιοδική επέκταση της συνάρτησης έτσι ώστε $....=f(-4\pi)=f(-2\pi)=f(0)=f(2\pi)=f(4\pi)=...=2\pi^2$.

Στο Σχήμα 1.17(α)-(δ) βλέπουμε προσεγγίσεις της συνάρτησης από διαδοχικούς όρους της σειράς Fourier, από πολυώνυμα δηλαδή της μορφής

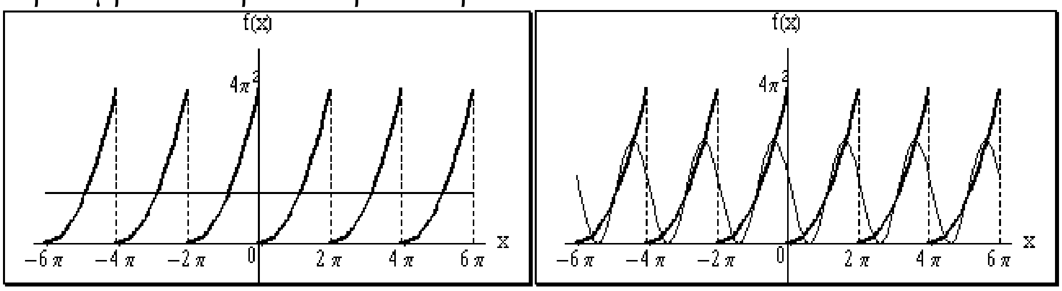
$$S_N(x)=\frac{4\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{4}{n^2}\cos nx-\frac{4\pi}{n}\sin nx\right)$$

για N = 0 (μέση τιμή), N = 1, N = 2 και N = 3.

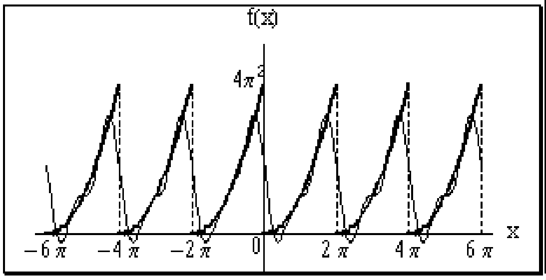
(ii) Αν στη σειρά Fourier που βρήκαμε στο *(i)* θέσουμε x = 0 θα έχουμε:

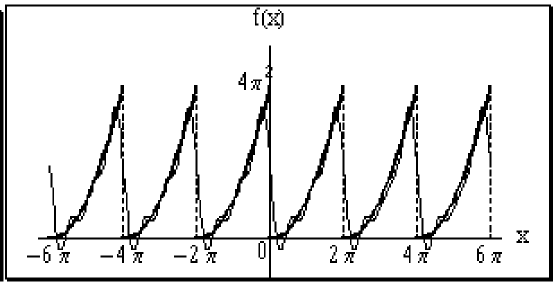
$$f(0)=\frac{4\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}=\frac{4\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

όπου $f(0)=2\pi^2$, όπως δηλαδή ορίσαμε την $f(x)$ στα σημεία ασυνέχειας ώστε να συγκλίνει η σειρά. Αφού λοιπόν $2\pi^2=\frac{4\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ προκύπτει και η ζητούμενη σχέση. Με το παράδειγμα αυτό βλέπουμε τον τρόπο με τον οποίο μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι σειρές Fourier στην απόδειξη ταυτοτήτων που περιλαμβάνουν όρια άπειρων σειρών.



(α) N = 0 *(β) N = 1*





(γ) N = 2 *(δ) N = 3*

Σχήμα 1.17(α)-(δ): Προσεγγίσεις της $f(x)$ του Παραδείγματος 1.6 από διαδοχικούς όρους της σειράς Fourier

1.3.5. Άρτιες και περιττές συναρτήσεις

Θα δούμε στη συνέχεια, ότι οι σχέσεις (1.24) που δίνουν τους συντελεστές Fourier και επομένως την αναλυτική έκφραση της σειράς Fourier μπορούν να απλοποιηθούν στις ειδικές περιπτώσεις όπου η περιοδική συνάρτηση είναι άρτια ή περιττή. Αρχικά δίνουμε τους ορισμούς και κάποιες χρήσιμες ιδιότητες των συναρτήσεων αυτών.

Μία συνάρτηση $f(x)$ καλείται **άρτια** (*even*) αν το σημείο -x ανήκει στο πεδίο ορισμού της, όταν ανήκει και το σημείο x και επιπλέον όταν

$$f(-x) = f(x).$$

Η γραφική παράσταση μίας τέτοιας συνάρτησης είναι συμμετρική ως προς τον κατακόρυφο άξονα. Παραδείγματα είναι οι συναρτήσεις x^4, $2x^6 - 4x^2 + 5$, $\cos x$, $e^x + e^{-x}$.

Μία συνάρτηση $f(x)$ καλείται **περιττή** (*odd*) αν το σημείο -x ανήκει στο πεδίο ορισμού της, όταν ανήκει και το σημείο x και επιπλέον όταν

$$f(-x) = -f(x).$$

Η γραφική παράσταση μίας περιττής συνάρτησης είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων. Παραδείγματα είναι οι συναρτήσεις x^3, $x^5 - 3x^3 + 2x$, $\sin x$, $\tan 3x$.

Μερικές χρήσιμες ιδιότητες σχετικές με τις περιττές και άρτιες συναρτήσεις είναι οι παρακάτω:

(1) Το άθροισμα και η διαφορά δύο άρτιων συναρτήσεων είναι άρτια συνάρτηση. Το άθροισμα και η διαφορά δύο περιττών συναρτήσεων είναι περιττή συνάρτηση. Το άθροισμα και η διαφορά μίας άρτιας και μίας περιττής συνάρτησης δεν είναι ούτε άρτια ούτε περιττή συνάρτηση.

(2) Το γινόμενο και το πηλίκο δύο άρτιων συναρτήσεων ή δύο περιττών συναρτήσεων είναι άρτια συνάρτηση. Το γινόμενο και το πηλίκο μίας άρτιας και μίας περιττής συνάρτησης είναι περιττή συνάρτηση. Στην περίπτωση του πηλίκου η ιδιότητα ισχύει για τιμές που δε μηδενίζουν τον παρονομαστή.

(3) Οποιαδήποτε συνάρτηση $f(x)$ μπορεί να εκφραστεί σαν άθροισμα δύο συνιστωσών συναρτήσεων από τις οποίες η μία είναι άρτια και η άλλη περιττή. Οι δύο συνιστώσες συναρτήσεις δίνονται από τις σχέσεις:

$$Ev\{f(x)\} = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] \text{ (η άρτια συνιστώσα)}$$

και

$$Od\{f(x)\} = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)] \text{ (η περιττή συνιστώσα).}$$

(4) Αν η $f(x)$ είναι άρτια, τότε $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$

(5) Αν η $f(x)$ είναι περιττή, τότε $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$ και $f(0) = 0$.

Σε σχέση τώρα με τη ανάπτυξη των άρτιων και περιττών συναρτήσεων σε σειρές Fourier, ισχύουν τα εξής:

Αν η $f(x)$ είναι άρτια και περιοδική συνάρτηση με περίοδο T, τότε η σειρά Fourier της $f(x)$ αποτελείται μόνο από ένα σταθερό όρο και όρους με συνημίτονα δηλαδή

$$\boxed{f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{2n\pi x}{T}} \quad \text{όπου} \quad \boxed{a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)\cos\left(\frac{2n\pi x}{T}\right)dx} \qquad (1.28)$$

Μία τέτοια σειρά ονομάζεται **σειρά (Fourier) συνημίτονων** (*Fourier cosine series*).

Αν η $f(x)$ είναι περιττή και περιοδική συνάρτηση με περίοδο T, τότε η σειρά Fourier της $f(x)$ αποτελείται μόνο από όρους με ημίτονα δηλαδή

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{2n\pi x}{T}} \quad \text{όπου} \quad \boxed{b_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)\sin\left(\frac{2n\pi x}{T}\right)dx} \qquad (1.29)$$

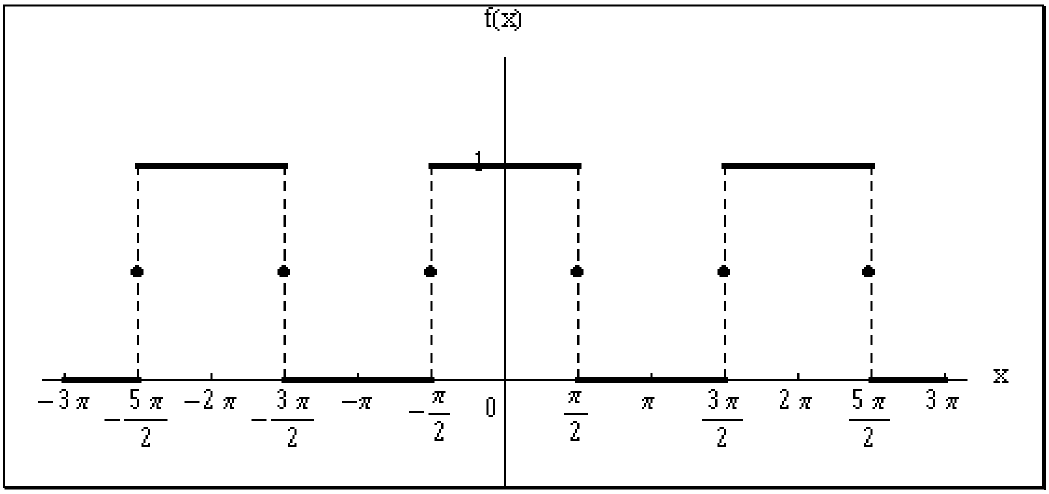
Μία τέτοια σειρά ονομάζεται **σειρά (Fourier) ημίτονων** (*Fourier sine series*).

Παράδειγμα 1.7.

Να βρεθεί η σειρά Fourier της περιοδικής επέκτασης της συνάρτησης:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < -\frac{\pi}{2} \\ 1, & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases} \quad \text{με περίοδο T = 2π.}$$

Εδώ έχουμε μία άρτια περιοδική συνάρτηση και επομένως η σειρά Fourier θα είναι σειρά συνημίτονων. Για να συγκλίνει η σειρά σε όλα τα σημεία της συνάρτησης πρέπει να οριστεί κατάλληλα η τιμή της $f(x)$ στα σημεία ασυνέχειας. Από όσα έχουμε αναφέρει, ορίζουμε την $f(x)$ έτσι ώστε f(-π/2) = f(π/2) = ½. Τη γραφική παράσταση της περιοδικής επέκτασης της συνάρτησης τη βλέπουμε στο Σχήμα 1.18.



Σχήμα 1.18: Περιοδική επέκταση της συνάρτησης $f(x)$.

Τους συντελεστές της σειράς συνημίτονων θα τους υπολογίσουμε από τη δεύτερη σχέση (1.28).

$$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)\cos\left(\frac{2n\pi x}{T}\right)dx = \frac{2}{\pi}\left\{\int_0^{\pi/2} 1\cdot\cos(nx)dx + \int_{\pi/2}^{\pi} 0\cdot\cos(nx)dx\right\}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left\{\frac{\sin(nx)}{n}\right\}\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{2}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} \dfrac{2}{n\pi}, & n = 4k+1 \\ -\dfrac{2}{n\pi}, & n = 4k+3 \quad \text{k} = 0,1,2,... \\ 0, & n = 2k \end{cases}$$

Επίσης για n = 0:

$$a_0 = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\left\{\int_0^{\pi/2} 1dx + \int_{\pi/2}^{\pi} 0dx\right\} = 1$$

Άρα η σειρά Fourier της συνάρτησης είναι:

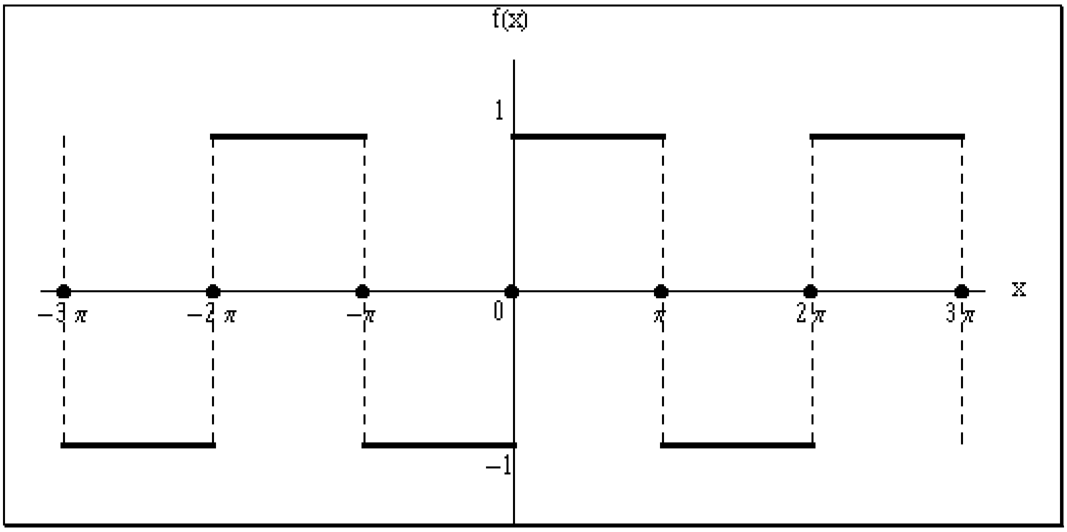
$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left\{\frac{\cos(x)}{1} - \frac{\cos(3x)}{3} + \frac{\cos(5x)}{5} - \frac{\cos(7x)}{7} + \cdots\right\} = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}\cos(2k-1)x$$

<u>Παράδειγμα 1.8.</u>

Να βρεθεί η σειρά Fourier της περιοδικής επέκτασης της συνάρτησης:

$$f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi < x < 0\\ 0, & \text{x = 0}\\ +1, & 0 < x < \pi\end{cases} \quad \text{με περίοδο Τ = 2π.}$$

Εδώ έχουμε μία περιττή περιοδική συνάρτηση και επομένως η σειρά Fourier θα είναι σειρά ημίτονων. Στο Σχήμα 1.19 μπορούμε να δούμε την περιοδική επέκταση της συνάρτησης.



Σχήμα 1.19: Περιοδική επέκταση της συνάρτησης $f(x)$.

Τους συντελεστές της σειράς ημίτονων τους υπολογίζουμε από τη δεύτερη των σχέσεων (1.29).

$$b_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)\sin\left(\frac{2n\pi x}{T}\right)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 1\cdot\sin(nx)dx = -\frac{2}{n\pi}\left\{\cos(nx)\Big|_0^{\pi}\right\} = \frac{2[1-\cos(n\pi)]}{n\pi}$$

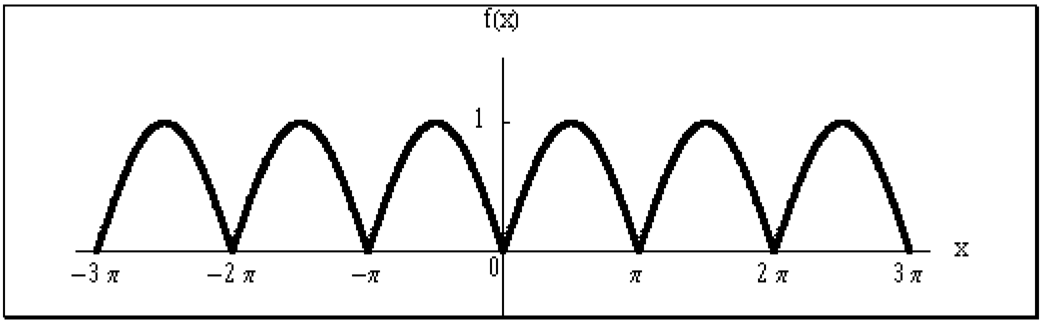
Άρα η σειρά Fourier θα είναι:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2[1-\cos(n\pi)]}{n\pi}\sin(nx) = \frac{4}{\pi}\left\{\frac{\sin(x)}{1} + \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin(5x)}{5} + \cdots\right\}$$

Παράδειγμα 1.9.

Να βρεθεί η σειρά Fourier της περιοδικής επέκτασης της $f(x) = \sin x$, $0 \le x < \pi$, Τ = π.

Η γραφική παράσταση της περιοδικής επέκτασης της συνάρτησης με περίοδο $T = \pi$, δίνεται στο Σχήμα 1.20. Η συνάρτηση <u>έτσι όπως ορίζεται</u> είναι άρτια (παρά το γεγονός ότι η συνάρτηση sin*x* είναι περιττή σύμφωνα με τον κλασσικό της ορισμό σε όλο το σύνολο των πραγματικών αριθμών).



Σχήμα 1.20: Η περιοδική επέκταση της $f(x) = \sin x$, $0 \le x < \pi$.

Σύμφωνα με όσα αναφέραμε, η σειρά Fourier θα αποτελείται μόνο από όρους συνημίτονων. Για την εύρεση των συντελεστών Fourier θα χρησιμοποιήσουμε τη δεύτερη των σχέσεων (1.28) και την τριγωνομετρική ταυτότητα:

$$\sin(A+B) + \sin(A-B) = 2\sin A \sin B .$$

Έτσι έχουμε:

$$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)\cos\left(\frac{2n\pi x}{T}\right)dx = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2}\sin x\cos(2nx)dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\{\sin(x+2nx)+\sin(x-2nx)\}dx = \frac{2}{\pi}\left\{-\frac{\cos(2n+1)x}{2n+1}+\frac{\cos(2n-1)x}{2n-1}\right\}\Bigg|_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n-1}\right) = -\frac{4}{\pi(4n^2-1)}$$

για $n = 0, 1, 2, \ldots$ (δε χρειάζεται ξεχωριστός υπολογισμός για το a_0).

Η αντίστοιχη σειρά Fourier η οποία συγκλίνει στην $f(x)$ σε όλα τα σημεία είναι:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{4}{\pi(4n^2-1)}\right]\cos 2nx = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{2^2-1}+\frac{\cos 4x}{4^2-1}+\frac{\cos 6x}{6^2-1}+\cdots\right)$$

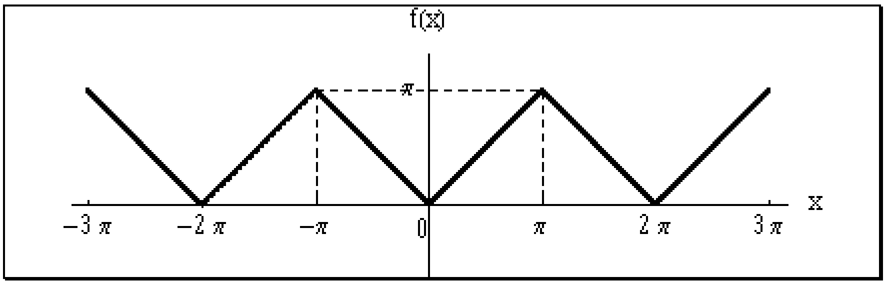
1.3.6. Άρτιες και περιττές περιοδικές επεκτάσεις συναρτήσεων

Σε πολλές εφαρμογές, δίνεται μία συνάρτηση ορισμένη σε ένα αρχικό διάστημα της μορφής (0, L) και ζητείται να αναπτυχθεί σε σειρά συνημίτονων ή σε σειρά ημίτονων. Αυτό που πρέπει να γίνει είναι να οριστεί η επέκταση της συνάρτησης έξω από το διάστημα (0, L) έτσι ώστε να είναι περιοδική με περίοδο T=2L και άρτια, αν θέλουμε σειρά συνημίτονων, ή περιττή αν θέλουμε σειρά ημίτονων.

<u>Παράδειγμα 1.10.</u>

Να αναπτυχθεί η $f(x) = x$, $0 < x < \pi$ *(α)* σε σειρά συνημίτονων και *(β)* σε σειρά ημίτονων.

(α) Επεκτείνουμε τον ορισμό της $f(x)$ και έξω από το διάστημα (0, π) ώστε αυτή να είναι περιοδική με περίοδο Τ = 2π και άρτια. Η γραφική της παράσταση δίνεται στο Σχήμα 1.21.



Σχήμα 1.21: Η <u>άρτια</u> περιοδική επέκταση της $f(x)=x$, $0<x<\pi$, Τ = 2π.

Οι συντελεστές και η συνημιτονική σειρά Fourier δίνονται από τις σχέσεις (1.28) και είναι (εφαρμόζουμε παραγοντική ολοκλήρωση):

$$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)\cos\left(\frac{2n\pi x}{T}\right) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx dx = \frac{2}{n\pi}\left\{x\sin(nx)\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\sin(nx)dx\right\} =$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left\{x\sin(nx)\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\cos(nx)\Big|_0^{\pi}\right\} = \frac{2(\cos n\pi - 1)}{n^2\pi}$$

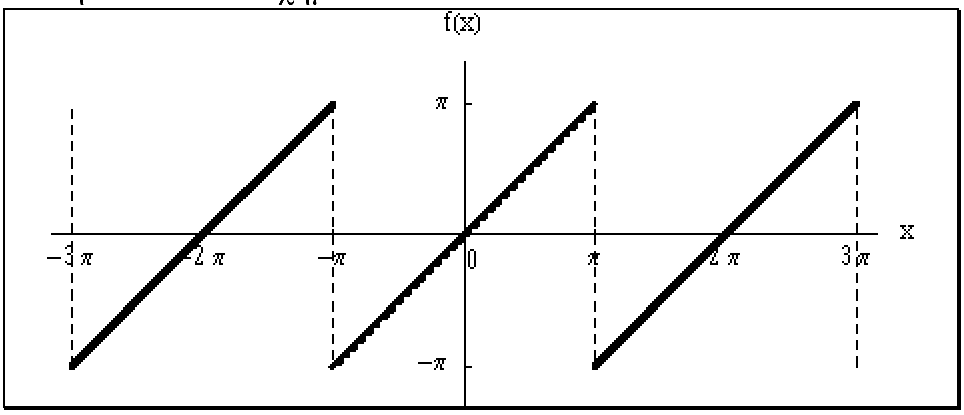
για n = 1, 2, ... ενώ για n = 0,

$$a_0 = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} xdx = \pi .$$

Η σειρά Fourier επομένως είναι:

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(\cos n\pi - 1)}{n^2\pi}\cos nx = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos(2k-1)x .$$

(β) Επεκτείνουμε τον ορισμό της $f(x)$ και έξω από το διάστημα (0, π) ώστε αυτή να είναι περιοδική με περίοδο Τ = 2π και περιττή. Η γραφική της παράσταση δίνεται στο Σχήμα 1.22.



Σχήμα 1.22: Η <u>περιττή</u> περιοδική επέκταση της $f(x)=x$, $0<x<\pi$, Τ = 2π

Οι συντελεστές και η σειρά Fourier ημίτονων δίνονται από τις σχέσεις (1.29) και είναι (χρησιμοποιούμε παραγοντική ολοκλήρωση):

$$b_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)\sin\left(\frac{2n\pi x}{T}\right)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin(nx)dx = \frac{2}{n\pi}\left\{-x\cos(nx)\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\cos nx dx\right\} =$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left\{-x\cos(nx)\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\sin(nx)\Big|_0^{\pi}\right\} = -\frac{2\cos n\pi}{n}$$

για n = 1, 2, ...

Η σειρά Fourier επομένως είναι:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2\cos n\pi}{n}\right)\sin(nx) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx .$$

Εδώ πρέπει να σημειώσουμε ότι στο διάστημα $0 < x < \pi$ η συνάρτηση έχει παράσταση και ως σειρά ημίτονων αλλά και ως σειρά συνημίτονων. Επίσης, και στις δύο περιπτώσεις (α) και (β) πρέπει να ορίσουμε την περιοδική επέκταση της $f(x)$ στα σημεία …, -3π, -2π, -π, 0, π, 2π, 3π, … έτσι ώστε οι σειρές να συγκλίνουν στη συνάρτηση σε όλα τα σημεία της. Συγκεκριμένα, στην περίπτωση (α) έχουμε

f(2kπ) = 0 και f[(2k+1)π] = π, για οποιοδήποτε ακέραιο k

ενώ στην περίπτωση (β)

f(kπ) = 0 για οποιοδήποτε ακέραιο k.

1.3.7. Προσέγγιση συνάρτησης από πεπερασμένες σειρές Fourier

Στα Παραδείγματα 1.5 και 1.6 των προηγούμενων παραγράφων δόθηκαν γραφικές παραστάσεις που δείχνουν τη σύγκλιση της σειράς Fourier στην αντίστοιχη συνάρτηση. Διαδοχικοί όροι της σειράς, τριγωνομετρικά πολυώνυμα δηλαδή της μορφής

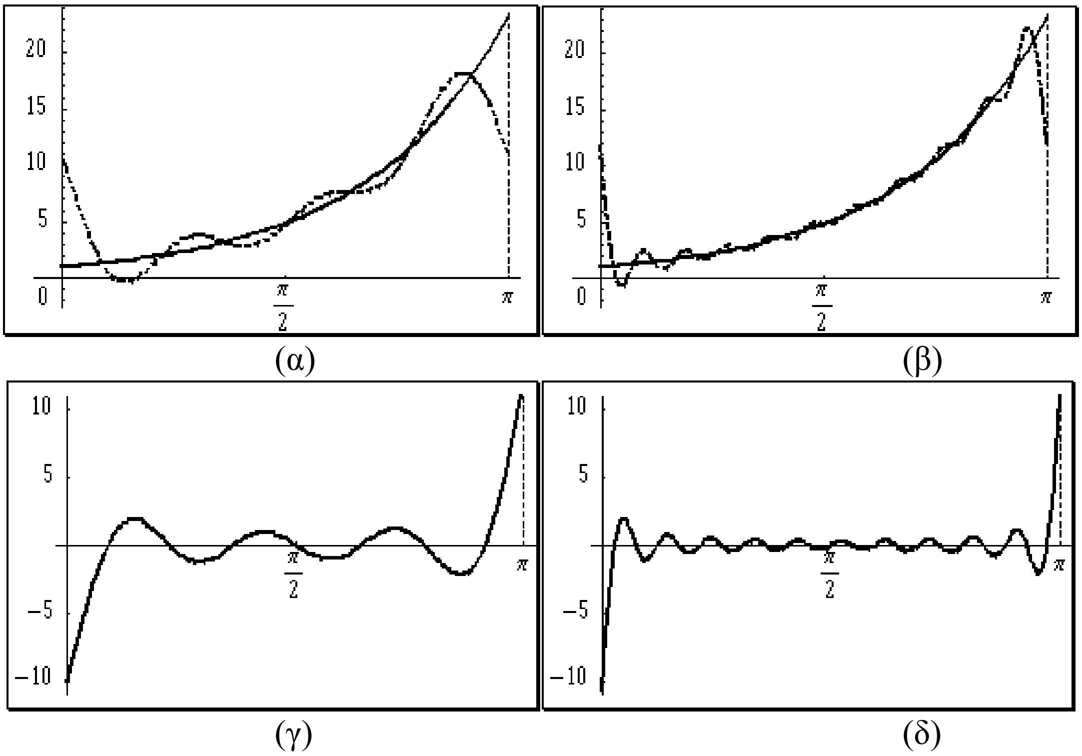
$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}\left\{a_n\cos\left(\frac{2n\pi x}{T}\right) + b_n\sin\left(\frac{2n\pi x}{T}\right)\right\} \tag{1.30}$$

μπορούν να προσεγγίσουν την περιοδική συνάρτηση $f(x)$. Τα πολυώνυμα αυτά συχνά αναφέρονται και σαν **πεπερασμένες σειρές Fourier** (*finite Fourier series*). Η **προσέγγιση** (*approximation*) γίνεται καλύτερη όσο το $N \to \infty$. Η διαφορά ανάμεσα στη συνάρτηση και στην προσέγγισή της από μία πεπερασμένη σειρά ονομάζεται **σφάλμα της προσέγγισης** (*error of approximation*), είναι συνάρτηση που ορίζεται ως εξής:

$$\boxed{\varepsilon_N(x) = f(x) - S_N(x)} \tag{1.31}$$

και εξαρτάται από το “βαθμό” της προσέγγισης, δηλαδή τον αριθμό N.

Στο Σχήμα 1.23 βλέπουμε διαδοχικά (α) τη συνάρτηση $f(x) = e^x$ στο διάστημα $0 < x < \pi$, T = π, και την προσέγγισή της από την πεπερασμένη σειρά Fourier $S_3(x)$ (δηλαδή N=3), (β) την ίδια συνάρτηση και την προσέγγισή της από την πεπερασμένη σειρά Fourier $S_{10}(x)$ (N = 10), (γ) το σφάλμα της πρώτης προσέγγισης $\varepsilon_3(x)$ στο διάστημα $0 < x < \pi$ και (δ) το σφάλμα της δεύτερης προσέγγισης $\varepsilon_{10}(x)$.



Σχήμα 1.23: (α) και (β) προσεγγίσεις συνάρτησης για N=3 και N=10 αντίστοιχα και
(γ) και (δ) σφάλματα των προσεγγίσεων.

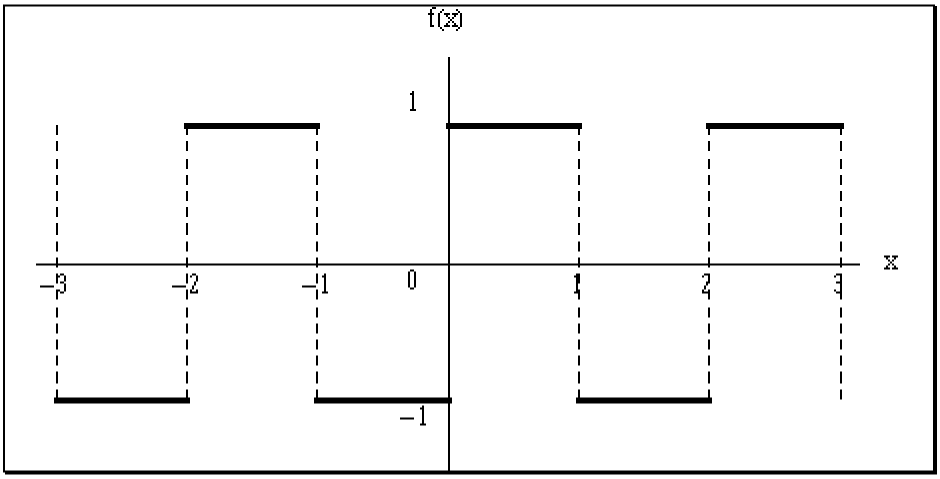
Ένα μέτρο για την μέτρηση του σφάλματος που γίνεται σε μία προσέγγιση είναι το **μέσο τετραγωνικό σφάλμα** (*mean square error*) που ορίζεται ως εξής:

$$\boxed{E_N = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}[\varepsilon_N(x)]^2\,dx = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}[f(x) - S_N(x)]^2\,dx} \qquad (1.32)$$

1.3.8. Το φαινόμενο Gibbs

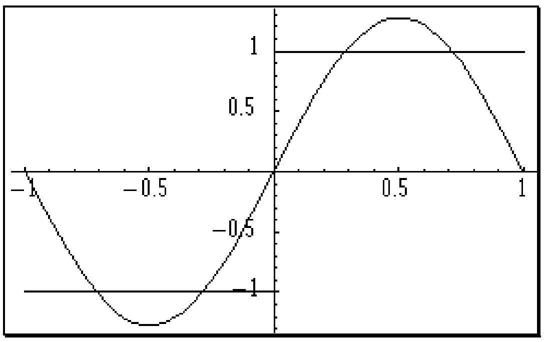
Ο εφευρετικότατος Αμερικανός φυσικός Albert Michelson κατασκεύασε πολλά όργανα εξαιρετικής ακρίβειας, κυρίως στον τομέα της οπτικής. Το 1898 κατασκεύασε έναν αρμονικό αναλυτή με τον οποίο μπορούσε να υπολογίσει τις πεπερασμένες σειρές Fourier $S_N(x)$ (σχέση 1.30) οι οποίες προσεγγίζουν κάποια δοσμένη συνάρτηση $f(x)$. Το μηχάνημα είχε την δυνατότητα να υπολογίζει προσεγγίσεις της συνάρτησης για τιμές του N μέχρι και 80. Στην πραγματικότητα, αυτό που έκανε ήταν να υπολογίζει τους συντελεστές Fourier της συνάρτησης (ανάλυση) και στη συνέχεια να ανακτά την αρχική συνάρτηση σα σύνθεση των πεπερασμένων σειρών με $N \leq 80$.

Ο Michelson δοκίμασε τη μηχανή του σε πολλές συναρτήσεις και διαπίστωσε ότι οι πεπερασμένες σειρές έδιναν πολύ ακριβείς προσεγγίσεις όπως ήταν αναμενόμενο. Όταν όμως δοκίμασε το **τετραγωνικό κύμα** (*square wave*), μία συνάρτηση δηλαδή της μορφής που φαίνεται στο Σχήμα 1.24, παρατήρησε ένα πολύ περίεργο φαινόμενο. Ενώ οι σειρές επανέφεραν με μεγάλη ακρίβεια την αρχική συνάρτηση (εκτός από κάποιες ελάχιστες ταλαντώσεις γύρω από την ευθεία γραμμή), στο σημείο της ασυνέχειας εμφανιζόταν μία παράξενη προεξοχή η οποία δεν υπήρχε στην αρχική συνάρτηση. Ο Michelson σκέφτηκε ότι πιθανόν να υπήρχε κάποιο κρυφό μηχανικό ελάττωμα στη μηχανή που προκαλούσε το πρόβλημα. ‘Εγραψε λοιπόν στον διακεκριμένο μαθηματικό και φυσικό Josiah Gibbs ζητώντας τη γνώμη του. Ο Gibbs εξήγησε το φαινόμενο βασιζόμενος στη μη ομοιόμορφη σύγκλιση της σειράς Fourier στη γειτονική περιοχή ενός σημείου ασυνέχειας.

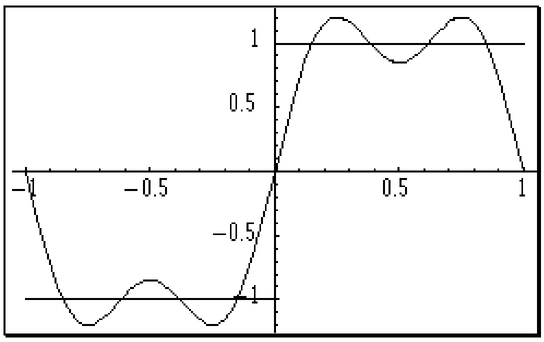


Σχήμα 1.24: Το τετραγωνικό κύμα όπου παρατηρήθηκε το φαινόμενο Gibbs

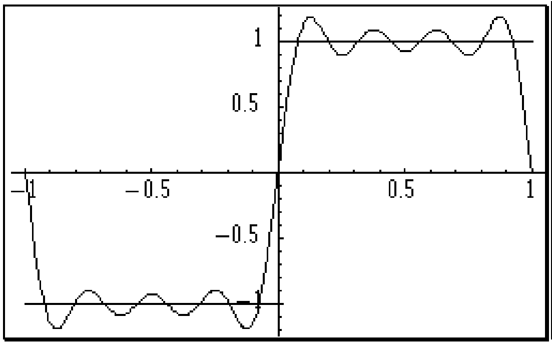
Στο Σχήμα 1.25(α)-(ε) φαίνονται οι διαδοχικές προσεγγίσεις ενός τετραγωνικού κύματος από τις πεπερασμένες σειρές Fourier για διάφορες τιμές του N (=1, 3, 7, 19, 39). Παρατηρούμε ότι όσο αυξάνει το N, η προσέγγιση γίνεται καλύτερη αλλά η “αιχμή” που εμφανίζεται στην περιοχή των σημείων ασυνέχειας, παρόλο που συμπιέζεται, εμφανίζεται πάντοτε με το ίδιο ύψος. Η συμπεριφορά αυτή είναι γνωστή σαν **φαινόμενο Gibbs** (*Gibbs phenomenon*) και εμφανίζεται πάντοτε όσο μεγάλο N και αν επιλέξουμε για την προσέγγιση της συνάρτησης. Το φαινόμενο Gibbs μπορούμε να το δούμε και στο Σχήμα 1.23 σε κάποια άλλη συνάρτηση με σημεία ασυνέχειας.



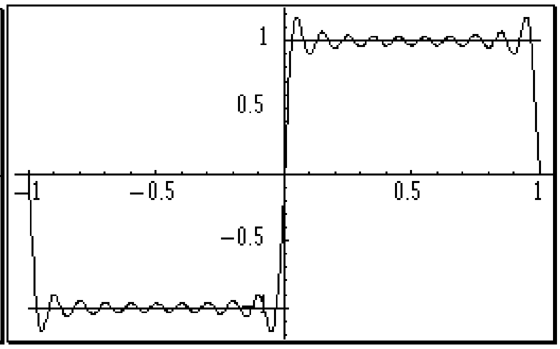
(α) N = 1



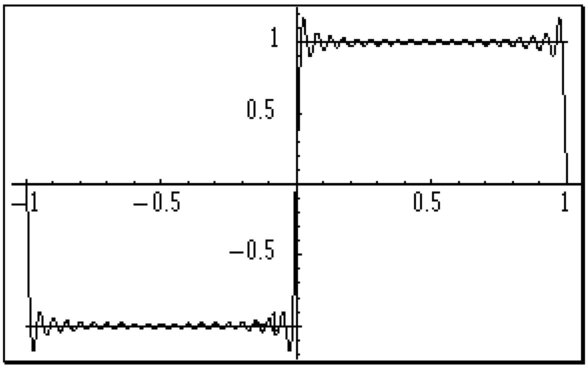
(β) N = 3



(γ) N = 7



(δ) N = 19



(ε) N = 39

Σχήμα 1.25(α)- (ε): Φαινόμενο Gibbs στην προσέγγιση τετραγωνικού κύματος από πεπερασμένες σειρές Fourier για διάφορες τιμές του N

1.3.9. Ταυτότητα του Parseval

Η **ισχύς** ή **ενέργεια** (*power*/*energy*) μίας περιοδικής συνάρτησης σε διάστημα περιόδου Τ ορίζεται σαν η *μέση τετραγωνική τιμή* της συνάρτησης στο διάστημα αυτό, είναι δηλαδή η ποσότητα

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\{f(x)\}^2\,dx .$$

Θεώρημα του Parseval: Αν $f(x)$ είναι περιοδική συνάρτηση με περίοδο T, τότε

$$\boxed{\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\{f(x)\}^2\,dx = \frac{1}{4}a_0^{\,2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^{\,2} + b_n^{\,2})} \qquad (1.32)$$

όπου a_n και b_n είναι οι συντελεστές Fourier όπως ορίζονται από τις σχέσεις (1.24). Μία εναλλακτική μορφή της γνωστής και ως **ταυτότητας του Parseval** (*Parseval's identity*) είναι η παρακάτω:

$$\boxed{\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\{f(x)\}^2\,dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|c_n\right|^2} \qquad (1.33)$$

όπου c_n είναι οι μιγαδικοί συντελεστές Fourier έτσι όπως ορίζονται στη σχέση (1.27). Με το συμβολισμό $\left|c_n\right|$ εννοούμε το μέτρο του μιγαδικού αριθμού c_n. Η ολοκλήρωση μπορεί να γίνει σε οποιοδήποτε διάστημα μήκους Τ.

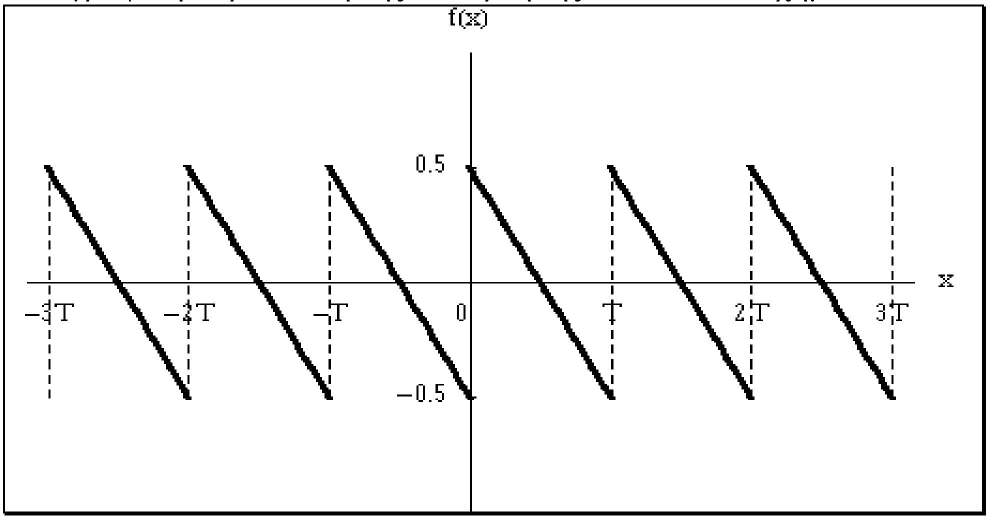
Παράδειγμα 1.11.

Να βρεθούν οι μιγαδικοί συντελεστές της "οδοντωτής" συνάρτησης

$$f(x) = -\frac{1}{T}x + \frac{1}{2} \quad \text{για } 0 < x < T \quad \text{και περίοδο T,}$$

και να αποδειχτεί ότι $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης δίνεται στο Σχήμα 1.24.



Σχήμα 1.24

Οι μιγαδικοί συντελεστές Fourier είναι από τη σχέση (1.27):

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)e^{-i\frac{2n\pi x}{T}}dx = \frac{1}{T}\int_0^T\left(-\frac{1}{T}x + \frac{1}{2}\right)e^{-i\frac{2n\pi x}{T}}dx = -\frac{i}{2\pi n}$$

για n = 1, 2, ... ενώ για n = 0,

$$c_0 = \frac{1}{T}\int_0^T\left(-\frac{1}{T}x + \frac{1}{2}\right)dx = 0 .$$

Από την ταυτότητα του Parseval (1.33) έχουμε:

$$\frac{1}{T}\int_0^T\left(-\frac{1}{T}x + \frac{1}{2}\right)^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|-\frac{i}{2\pi n}\right|^2 .$$

Το ορισμένο ολοκλήρωμα του αριστερού μέλους δίνει 1/12. Το δεξιό μέλος είναι $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|-\frac{i}{2\pi n}\right|^2 = \frac{2}{4\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, οπότε προκύπτει η ζητούμενη σχέση.

1.3.10. Εφαρμογές των σειρών Fourier στις Διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους

Διαφορική εξίσωση μερικών παραγώγων (*partial differential equation*) (για συντομία **δ.ε.μ.π.**) είναι μία εξίσωση που περιέχει μία άγνωστη συνάρτηση δύο ή περισσότερων μεταβλητών και τις μερικές παραγώγους της ως προς τις μεταβλητές αυτές.

Τάξη (*order*) μίας δ.ε.μ.π. ονομάζεται η μεγαλύτερη τάξη παραγώγου στην εξίσωση. **Λύση** (*solution*) μίας δ.ε.μ.π. είναι μία συνάρτηση που ικανοποιεί την εξίσωση. **Γενική λύση** (*general solution*) μίας δ.ε.μ.π. είναι μία λύση που περιλαμβάνει ένα πλήθος αυθαίρετων ανεξάρτητων συναρτήσεων ίσο με την τάξη της εξίσωσης. **Μερική λύση** (*particular solution*) μίας δ.ε.μ.π. είναι μία λύση που μπορεί να προκύψει από τη γενική λύση για συγκεκριμένη εκλογή των αυθαιρέτων συναρτήσεων. **Ιδιάζουσα λύση** (*singular solution*) μίας δ.ε.μ.π. είναι μία λύση που δεν μπορεί να προκύψει από τη γενική λύση με συγκεκριμένη εκλογή των αυθαιρέτων συναρτήσεων.

Παράδειγμα 1.12.

Η εξίσωση $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2x - y$ είναι μία *δ.ε.μ.π. δεύτερης τάξης*. Η άγνωστη συνάρτηση είναι η *u = u(x, y)* και οι ανεξάρτητες μεταβλητές είναι οι *x* και *y*. Μία *λύση* της εξίσωσης είναι η $u = x^2 y - \frac{1}{2} x y^2 + F(x) + G(y)$ όπως εύκολα μπορεί να επαληθευτεί. Επειδή η λύση αυτή περιέχει δύο αυθαίρετες ανεξάρτητες συναρτήσεις, τις $F(x)$ και $G(y)$ (όσες και η τάξη της εξίσωσης), είναι και η *γενική λύση*. Στην ειδική περίπτωση όπου $F(x) = 2\sin x$ και $G(y) = 3y^4 - 5$ παίρνουμε τη *μερική λύση* $u = x^2 y - \frac{1}{2} x y^2 + 2\sin x + 3y^4 - 5$.

Παράδειγμα 1.13.

Η εξίσωση $u = x\frac{\partial u}{\partial x} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$ είναι μία *δ.ε.μ.π. πρώτης τάξης*. Η άγνωστη συνάρτηση είναι και εδώ η *u = u(x, y)*. Η *γενική λύση* εδώ είναι η $u = xF(y) - [F(y)]^2$. Μία άλλη λύση είναι η $u = \frac{x^2}{4}$ που όμως δε μπορεί να προκύψει από κατάλληλη εκλογή της F(y). Η λύση αυτή είναι μία *ιδιάζουσα λύση*.

Πρόβλημα συνοριακών τιμών (*boundary value problem*) είναι η εύρεση λύσεων μίας δ.ε.μ.π. οι οποίες όμως ικανοποιούν κάποιες συνθήκες, τις λεγόμενες **συνοριακές συνθήκες** (*boundary conditions*).

Γραμμική (*linear*) **δ.ε.μ.π.** δεύτερης τάξης με δύο ανεξάρτητες μεταβλητές ονομάζεται μία δ.ε.μ.π. με γενική μορφή

$$\boxed{A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G} \tag{1.34}$$

όπου οι συντελεστές *A, B, ..., G* μπορεί να είναι συναρτήσεις του x και του y αλλά όχι του u. Αν η δ.ε.μ.π. δεν είναι της μορφής (3.1) τότε ονομάζεται **μη γραμμική**.

Αν $G = 0$ τότε η εξίσωση (1.34) ονομάζεται **ομογενής** (*homogeneous*) ενώ αν $G \neq 0$, ονομάζεται **μη ομογενής**.

Θα δούμε τώρα τη διαδικασία επίλυσης ενός προβλήματος συνοριακών τιμών δ.ε.μ.π. με τη βοήθεια των σειρών Fourier μέσα από ένα παράδειγμα.

<u>Παράδειγμα 1.14.</u>

Να βρεθεί λύση $u(x, y)$ στο παρακάτω πρόβλημα συνοριακών τιμών:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad y > 0, 0 < x < 2$$

$$u(0, y) = 0, u(2, y) = 0, \quad y > 0$$

$$u(x,0) = x, \qquad 0 < x < 2$$

Η δ.ε.μ.π. αυτή, στην πράξη είναι η εξίσωση διάδοσης της θερμότητας σε λεπτή ράβδο που βρίσκεται πάνω στον άξονα των x ανάμεσα στα σημεία x = 0 και x = 2. Η συνάρτηση $u(x, y)$ παριστά την θερμοκρασία κάθε σημείου x τη χρονική στιγμή y. Η σταθερά k = 3 είναι η σταθερά διάχυσης της θερμότητας. Οι συνοριακές συνθήκες $u(0, y) = 0, u(2, y) = 0, \quad y > 0$ δείχνουν ότι οι θερμοκρασία στα άκρα της ράβδου είναι μηδενική για όλες τις χρονικές στιγμές. Η $u(x,0)$ παριστά την αρχική θερμοκρασία σε οποιοδήποτε σημείο x της ράβδου και είναι συνάρτηση του x στη γενική περίπτωση.

Για την επίλυση της εξίσωσης εφαρμόζουμε τη μέθοδο του **διαχωρισμού των μεταβλητών** (*seperation of variables*). Υποθέτουμε δηλαδή ότι υπάρχουν συναρτήσεις $X(x)$ και $Y(y)$ τέτοιες ώστε

$$u(x, y) = X(x)Y(y) \tag{1.35}$$

Αντικαθιστώντας την (1.35) στην δ.ε.μ.π. έχουμε:

$$X(x)Y'(y) = 3X''(x)Y(y)$$

ή για συντομία

$$\frac{X''}{X} = \frac{Y'}{3Y} \tag{1.36}$$

Στην (1.36) παρατηρούμε ότι το αριστερό μέλος πρέπει να είναι συνάρτηση μόνο του x ενώ το δεξιό μόνο του y. Για να ισχύει επομένως η ισότητα πρέπει να υπάρχει σταθερά c ώστε οι δύο λόγοι να ισούνται με αυτήν. Αποδεικνύεται γενικά ότι για να υπάρχει λύση πρέπει να είναι $c < 0$. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $c = -\lambda^2$ όπου λ σταθερά. Από την (1.36) έχουμε

$$\frac{X''}{X} = \frac{Y'}{3Y} = -\lambda^2$$

από όπου προκύπτει το σύστημα των κανονικών διαφορικών εξισώσεων

$$X'' + \lambda^2 X = 0 \qquad \text{και} \qquad Y' + 3\lambda^2 Y = 0$$

με λύσεις

$$X = A_1 \cos\lambda x + B_1 \sin\lambda x \qquad \text{και} \qquad Y = C_1 e^{-3\lambda^2 y}.$$

Τελικά αντικαθιστώντας στην (1.35) παίρνουμε τη λύση:

$$u(x,y)=e^{-3\lambda^2 y}(A\cos\lambda x+B\sin\lambda x) \tag{1.37}$$

Πρέπει τώρα να υπολογίσουμε τα A και B ώστε να ικανοποιούνται οι συνοριακές συνθήκες. Από την $u(0,y)=0$ προκύπτει με αντικατάσταση στην (1.37) ότι $A=0$. Επομένως η λύση (1.37) γίνεται

$$u(x,y)=Be^{-3\lambda^2 y}\sin\lambda x\ . \tag{1.38}$$

Από την επόμενη συνοριακή συνθήκη $u(2,y)=0$ προκύπτει (αποφεύγουμε να πάρουμε $B=0$ γιατί η λύση θα είναι επίσης μηδενική):

$$\sin 2\lambda=0 \qquad \text{και} \quad \text{άρα} \qquad \lambda=\frac{m\pi}{2},\ m=0,\pm1,\pm2,\dots .$$

Η (1.38) τότε θα γίνει:

$$u(x,y)=B_m e^{\frac{-3m^2\pi^2 y}{4}}\sin\frac{m\pi x}{2} \tag{1.39}$$

Θέτουμε B_m αντί για B, αφού για κάθε διαφορετική εκλογή του m μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε διαφορετική σταθερά.

Αν προσπαθήσουμε να ικανοποιήσουμε την τελευταία συνοριακή συνθήκη $u(x,0)=x$, θα διαπιστώσουμε ότι είναι αδύνατο. Για το λόγο αυτό χρησιμοποιούμε τη λεγόμενη **αρχή της υπέρθεσης** (*principle of superposition*) που δηλώνει ότι αθροίσματα λύσεων της μορφής (1.39) είναι επίσης λύσεις της δ.ε.μ.π.. Έτσι οδηγούμαστε στην πιθανή λύση

$$u(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}B_m e^{\frac{-3m^2\pi^2 y}{4}}\sin\frac{m\pi x}{2} \tag{1.40}$$

Εφαρμόζοντας τώρα την $u(x,0)=x$ για $0<x<2$, η (1.40) γίνεται τελικά

$$x=\sum_{m=1}^{\infty}B_m\sin\frac{m\pi x}{2}, \qquad 0<x<2 \tag{1.41}$$

Παρατηρούμε ότι η σχέση (1.41) είναι το ανάπτυγμα της συνάρτησης $f(x)=x$ για $0<x<2$ σε σειρά ημίτονων.

Στο σημείο αυτό θα αναφερθούμε στο παράδειγμα 1.10 όπου είχαμε υπολογίσει τα αναπτύγματα της $f(x)=x$, $0<x<\pi$ σε σειρά συνημίτονων και σε σειρά ημίτονων. Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο αποδεικνύεται ότι η ίδια συνάρτηση για $0<x<2$ έχει ανάπτυγμα σε σειρά ημίτονων:

$$x=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{-4}{m\pi}\cos m\pi\sin\frac{m\pi x}{2}\ . \tag{1.42}$$

Επομένως οι ζητούμενοι συντελεστές B_m είναι οι συντελεστές Fourier της ημιτονικής σειράς και τελικά η λύση θα είναι:

$$u(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\left(-\frac{4}{m\pi}\cos m\pi\right)e^{\frac{-3m^2\pi^2 y}{4}}\sin\frac{m\pi x}{2}\ . \tag{1.43}$$

Εδώ πρέπει να τονίσουμε ότι η (1.43) είναι <u>πιθανή λύση</u> που πρέπει να επαληθευτεί ότι ικανοποιεί την δ.ε.μ.π. και τις συνοριακές συνθήκες. Η επαλήθευση πρέπει να γίνει με παραγώγιση των όρων της σειράς και χρήση θεωρημάτων σύγκλισης άπειρων σειρών.

Ασκήσεις

1.1. Να βρεθεί η περίοδος των παρακάτω συναρτήσεων:

(α) $\cos nx$*, (β) cos2πx, (γ) sin(2πx/k), (δ) sinx+sin(x/3)+sin(x/5) (ε)* $|\sin \omega_0 x|$

1.2. Να δειχτεί ότι η συνάρτηση $f(x)$=σταθερά είναι περιοδική συνάρτηση με περίοδο T για κάθε θετική τιμή του T.

1.3. Να δειχτεί ότι αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι περιοδική συνάρτηση του x με περίοδο T, τότε και η *f(ax)* είναι περιοδική συνάρτηση του x με περίοδο *T/a* ($a \neq 0$).

1.4. Να παρασταθούν γραφικά οι περιοδικές επεκτάσεις των συναρτήσεων

(α) $f(x) = \begin{cases} -3, -5 \leq x < 0 \\ \\ +3, \quad 0 \leq x < 5 \end{cases}$ με περίοδο T = 10.

(β) $f(x) = \begin{cases} \sin x, \quad 0 \leq x < \pi \\ \\ 0, \qquad \pi \leq x < 2\pi \end{cases}$ με περίοδο T = 2π.

(γ) $f(x) = \begin{cases} 0, \quad 0 \leq x < 2 \\ 1, \quad 2 \leq x < 4 \\ 0, \quad 4 \leq x < 6 \end{cases}$ με περίοδο T = 6.

1.5. Να εξεταστεί αν οι παρακάτω περιοδικές επεκτάσεις των συναρτήσεων $f(x)$ είναι άρτιες ή περιττές

(α) $f(x) = \begin{cases} -2, \ -3 \leq x < 0 \\ \\ +2, \ -0 \leq x < 3 \end{cases}$ με περίοδο T = 6

(β) $f(x) = \begin{cases} \cos x, \quad 0 \leq x < \pi \\ \\ 0, \qquad \pi \leq x < 2\pi \end{cases}$ με περίοδο T = 2π

(γ) $f(x) = x(10 - x), \ \ 0 \leq x < 10$ με περίοδο T = 10

1.6. Να δειχτεί ότι αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι περιττή, η $|f(x)|$ θα είναι άρτια.

1.7. Για κάθε μία από τις παρακάτω συναρτήσεις, να βρεθεί η άρτια και η περιττή συνιστώσα:

(α) e^x, *(β)* $\dfrac{x+1}{x-1}$, *(γ)* $x \sin x - \sin 2x$

1.8. Για κάθε μία από τις παρακάτω συναρτήσεις να γίνει η γραφική παράσταση της περιοδικής της επέκτασης (δίνεται η περίοδος Τ) και να βρεθεί η αντίστοιχη σειρά Fourier χρησιμοποιώντας ιδιότητες (όπου ισχύουν) για άρτιες και περιττές συναρτήσεις. Στις περιπτώσεις που υπάρχουν σημεία ασυνέχειας να οριστεί πάλι η συνάρτηση ώστε η σειρά Fourier να συγκλίνει παντού.

(α) $f(x)=\begin{cases}+8, & 0\le x<2\\ -8, & 2\le x<4\end{cases}$, $\mathrm{T}=4$ *(β)* $f(x)=\begin{cases}-\mathrm{x}, & -4\le x<0\\ x, & 0\le x<4\end{cases}$, $\mathrm{T}=8$

(γ) $f(x)=4\mathrm{x},\ 0\le x<10$, $\mathrm{T}=10$ *(δ)* $f(x)=\begin{cases}0, & -3\le x<0\\ 2\mathrm{x}, & 0\le x<3\end{cases}$, $\mathrm{T}=6$

(ε) $f(x)=\begin{cases}2-\mathrm{x}, & 0\le x<4\\ \mathrm{x}-6, & 4\le x<8\end{cases}$, $\mathrm{T}=8$ *(ζ)* $f(x)=\cos x,\ 0\le x<\pi$, $\mathrm{T}=\pi$

(η) $f(x)=\begin{cases}\sin x, & 0\le x<\pi\\ 0, & \pi\le x<2\pi\end{cases}$, $\mathrm{T}=2\pi$ *(θ)* $f(x)=\begin{cases}1+\dfrac{4x}{a}, & -\dfrac{\mathrm{a}}{2}\le x<0\\ 1-\dfrac{4x}{a}, & 0\le x<\dfrac{a}{2}\end{cases}$, $\mathrm{T}=\mathrm{a}$

(ι) $f(x)=\mathrm{x}^2,\ -\pi\le x<\pi$, $\mathrm{T}=2\pi$ *(κ)* $f(x)=e^x,\ -\pi\le x<\pi$, $\mathrm{T}=2\pi$

(λ) $f(x)=|\mathrm{x}|,\ -\pi\le x<\pi$, $\mathrm{T}=2\pi$ *(μ)* $f(x)=\sin^2\mathrm{x},\ -\pi\le x<\pi$, $\mathrm{T}=2\pi$

(ν) $f(x)=\begin{cases}1, & 0\le x<a\\ 0, & a\le x<2-a\\ 1, & 2-\mathrm{a}\le x<2\end{cases}$, $\mathrm{T}=2$ *(ξ)* $f(x)=\begin{cases}0, & -2\le \mathrm{x}<-1\\ 1, & -1\le x<0\\ -1, & 0\le x<1\\ 0, & 1\le x<2\end{cases}$, $\mathrm{T}=4$

1.9. Να προσεγγίσετε τη συνάρτηση $f(x)=x$ στο διάστημα $-\pi<x<\pi$ με μία πεπερασμένη σειρά Fourier με Ν = 5 όρους. Στη συνέχεια να υπολογίσετε το μέσο τετραγωνικό σφάλμα της προσέγγισης.

1.10. Να αναπτυχθούν οι παρακάτω συναρτήσεις (i) σε σειρά ημίτονων και (ii) σε σειρά συνημίτονων.

(α) $f(x)=4x,\ 0\le x<\pi$ *(β)* $f(x)=1,\ 0\le x<\pi$

(γ) $f(x)=\sin x,\ 0\le x<\pi$ *(δ)* $f(x)=1-\dfrac{x}{a},\ 0\le x<a$

(ε) $f(x)=\begin{cases}0, & 0\le x<\dfrac{\pi}{2}\\[2ex] 2, & \dfrac{\pi}{2}\le x<\pi\end{cases}$ *(ζ)* $f(x)=\begin{cases}\mathrm{x}, & 0<x<4\\[2ex] 8-\mathrm{x}, & 4<x<8\end{cases}$

1.11. Αφού αποδείξετε ότι για $0\le x<\pi$ ισχύει:

(α) $x(\pi-x)=\dfrac{\pi^2}{6}-\left(\dfrac{\cos 2x}{1^2}+\dfrac{\cos 4x}{2^2}+\dfrac{\cos 6x}{3^2}+\cdots\right)$ και

(β) $x(\pi-x)=\dfrac{8}{\pi}\left(\dfrac{\sin x}{1^3}+\dfrac{\sin 3x}{3^3}+\dfrac{\sin 5x}{5^3}+\cdots\right)$

δείξτε στη συνέχεια τις σχέσεις:

$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{\pi^2}{6}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\dfrac{\pi^2}{12}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}=\dfrac{\pi^3}{32}$.

Χρησιμοποιήστε την ταυτότητα του Parseval για να αποδείξετε τις σχέσεις:

$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^4}=\dfrac{\pi^4}{90}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^6}=\dfrac{\pi^6}{945}$

2. ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ FOURIER

2.1. Εισαγωγή

Η θεωρία των σειρών Fourier την οποία περιγράψαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, περιορίζεται στο σύνολο των περιοδικών συναρτήσεων. Αλλά η περιοδικότητα είναι χαρακτηριστική ιδιότητα ορισμένων μόνο συναρτήσεων. Είδαμε ότι αν η συνάρτηση $f(x)$ έχει πεδίο ορισμού ένα διάστημα των πραγματικών αριθμών πεπερασμένου μήκους, μπορούμε άνετα να ορίσουμε την περιοδική επέκτασή της και έξω από το αρχικό διάστημα παίρνοντας επαναλήψεις της συνάρτησης σε διαδοχικά διαστήματα ίδιου μήκους. Αλλά μία συνάρτηση μπορεί να έχει πεδίο ορισμού διάστημα με μη πεπερασμένο (άπειρο) μήκος. Ο Fourier είχε την ευφυέστατη ιδέα να θεωρήσει μία τέτοια συνάρτηση σαν περιοδική της οποίας η περίοδος να έχει όριο το άπειρο. Η ιδέα αυτή οδήγησε σε ένα νέο μαθηματικό εργαλείο, το λεγόμενο “*ολοκλήρωμα Fourier”,* το οποίο άνοιξε ένα νέο κεφάλαιο στην ανάλυση και είχε εντονότατο αντίκτυπο στην εφαρμογή του στις φυσικές επιστήμες.

Το “ολοκλήρωμα Fourier” είναι προσωπική ανακάλυψη του Fourier. Η ανάπτυξη συναρτήσεων σε τριγωνομετρικές σειρές ήταν γνωστή στους μαθηματικούς του 18ου αιώνα, παρόλο που ο Fourier ήταν ο πρώτος που προέβλεψε την ευρύτατη εφαρμογή της. Το ολοκλήρωμα Fourier όμως εμφανίστηκε για πρώτη φορά στις προσωπικές του έρευνες και ήταν ο ίδιος που αναγνώρισε τη θεμελιώδη σημασία του μαθηματικού αυτού εργαλείου.

2.2. Το ολοκλήρωμα Fourier

Το ολοκλήρωμα Fourier επιτρέπει την παράσταση μίας αυθαίρετης συνάρτησης $f(x)$, η οποία μπορεί να αποτελείται από τελείως διαφορετικά τμήματα σε διάφορα διαστήματα του πραγματικού άξονα, από μία έκφραση

$$\boxed{f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{i\omega x}d\omega} \tag{2.1}$$

όπου

$$\boxed{F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\omega x}dx} \tag{2.2}$$

Η συνάρτηση $F(\omega)$ καλείται **ολοκλήρωμα Fourier** (*Fourier integral*) ή **μετασχηματισμός Fourier** (*Fourier transform*) της $f(x)$ και συμβολίζεται συνήθως με $\mathcal{F}\{f(x)\}$. Η εξίσωση (2.1) ονομάζεται **αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier** (*inverse Fourier transform*) και η εύρεση της $f(x)$, όταν δίνεται η $F(\omega)$, συμβολίζεται με $\mathcal{F}^{-1}\{f(x)\}$. Οι δύο εξισώσεις (2.1) και (2.2) αναφέρονται και ως **ζεύγος μετασχηματισμού Fourier** (*Fourier transform pair*). Συχνά είναι βολικό να χρησιμοποιούμε το συμβολισμό

$$\boxed{f(x)\xleftrightarrow{\mathrm{F}}F(\omega)} \tag{2.3}$$

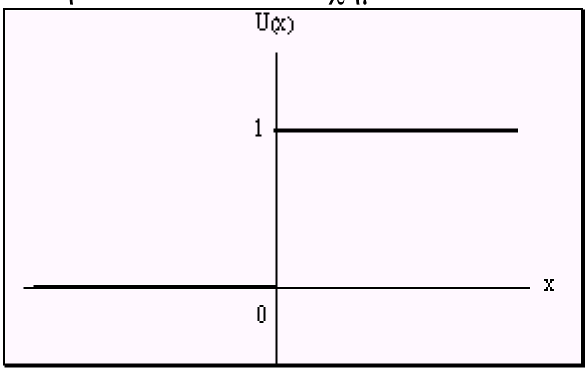
για να δείχνουμε ότι οι συναρτήσεις $f(x)$ και $F(\omega)$ συνδέονται με τα ολοκληρώματα (2.1) και (2.2).

Για να κατανοήσουμε τη σημασία του ζεύγους των παραπάνω εξισώσεων (2.1) και (2.2), δεχόμαστε ότι η μεταβλητή x παριστά **χρόνο** (*time*) και η μεταβλητή ω **συχνότητα** (*frequency*) (μεγέθη που τα συναντάμε στη θεωρία σημάτων). Ένα οποιαδήποτε σήμα (ηλεκτρικό, ακουστικό, οπτικό κ.λ.π.) μπορεί να παρασταθεί με δύο διαφορετικούς τρόπους: Είτε σαν συνάρτηση με πεδίο ορισμού το χρόνο ($f(x)$) είτε σαν συνάρτηση με πεδίο ορισμού τη συχνότητα ($F(\omega)$). Η εξίσωση (2.2) **αναλύει** τη συνάρτηση του χρόνου σε φάσμα συχνοτήτων ενώ η (2.1) **συνθέτει** το φάσμα συχνοτήτων για την επανάκτηση της συνάρτησης χρόνου.

Σε ότι ακολουθεί, θα χρησιμοποιήσουμε συχνά στα παραδείγματα το συμβολισμό της συνάρτησης **μοναδιαίου βήματος** (*unit step function*) δηλαδή τη συνάρτηση με τύπο

$$U(x) = \begin{cases} 0, & \mathrm{x} < 0 \\ 1, & \mathrm{x} > 0 \end{cases} \tag{2.4}$$

και γραφική παράσταση που δίνεται στο Σχήμα 2.1.



Σχήμα 2.1: Η συνάρτηση μοναδιαίου βήματος

2.2.1. Από τις σειρές Fourier στο ολοκλήρωμα Fourier - συνθήκες ύπαρξης

Η ισχύς της εξίσωσης (2.1) εδραιώνεται από το αντίστοιχο αποτέλεσμα στις σειρές Fourier. Η συνάρτηση $f(x)$ δηλαδή αναπτύσσεται σε σειρά εκθετικών μιγαδικών συναρτήσεων στο διάστημα (-T/2, T/2) και αποδεικνύεται ότι η ανάπτυξη αυτή τείνει στο ολοκλήρωμα (2.1) όταν το T τείνει στο άπειρο. Παρουσιάζουμε εδώ τα βασικά σημεία της προσέγγισης αυτής χωρίς μεγάλη μαθηματική αυστηρότητα στην απόδειξη.

Είναι γνωστό από τη θεωρία των σειρών Fourier (σχέσεις (1.27)) ότι μία αυθαίρετη συνάρτηση $f(x)$ μπορεί να γραφεί στο διάστημα (-T/2, T/2) σαν άθροισμα

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 x}, \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \tag{2.5}$$

όπου οι συντελεστές c_n δίνονται από τη σχέση

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)e^{-in\omega_0 x}dx. \qquad (2.6)$$

Αν θεωρήσουμε την $F(\omega)$ που ορίζεται από το ολοκλήρωμα (2.2), η σχέση (2.6) μπορεί να γραφεί:

$$Tc_n = \int_{-T/2}^{T/2} f(x)e^{-in\omega_0 x}dx \xrightarrow[T\to\infty]{} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-in\omega_0 x}dx = F(n\omega_0). \qquad (2.7)$$

Επομένως, έχουμε από τις (2.5) και (2.7) ότι

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 x} = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} Tc_n e^{in\omega_0 x} = \frac{\omega_0}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} Tc_n e^{in\omega_0 x} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} Tc_n e^{in\omega_0 x}\omega_0 \xrightarrow[T\to\infty]{} \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n\omega_0)e^{in\omega_0 x}\omega_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega x}d\omega$$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα προκύπτει σαν όριο αθροίσματος αφού λάβουμε υπόψη ότι η ποσότητα $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ τείνει στο μηδέν όταν το $T \to \infty$, δηλαδή

$$\omega_0 = \Delta\omega \to d\omega \qquad \text{και} \qquad n\omega_0 = n\Delta\omega \to \omega$$

Οι συνθήκες σύγκλισης του ολοκληρώματος Fourier, και επομένως και της ύπαρξης του αντίστοιχου μετασχηματισμού, είναι οι αντίστοιχες με τις γνωστές από το κεφάλαιο 1, και αναφέρονται και εδώ σαν **συνθήκες Dirichlet**:

(1) Η $f(x)$ πρέπει να είναι **απόλυτα ολοκληρώσιμη**, δηλαδή πρέπει να ισχύει:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx < \infty.$$

(2) Σε οποιοδήποτε διάστημα πεπερασμένου μήκους, η $f(x)$ πρέπει να έχει πεπερασμένο αριθμό μεγίστων και ελαχίστων.

(3) Σε οποιοδήποτε διάστημα πεπερασμένου μήκους, πρέπει να υπάρχει πεπερασμένος αριθμός σημείων ασυνέχειας και επιπλέον η ασυνέχεια σε αυτά τα σημεία να είναι πεπερασμένη.

Στα σημεία ασυνέχειας το ολοκλήρωμα Fourier της σχέσης (2.1) συγκλίνει στην ποσότητα $\frac{f(x+)+f(x-)}{2}$.

Πρέπει να τονίσουμε εδώ, ότι οι προηγούμενες συνθήκες είναι ικανές αλλά όχι αναγκαίες. Υπάρχουν, για παράδειγμα, συναρτήσεις που δεν είναι απόλυτα ολοκληρώσιμες, αλλά έχουν μετασχηματισμό Fourier. Μία μεγάλη κλάση συναρτήσεων που δεν ικανοποιούν την πρώτη συνθήκη είναι οι περιοδικές συναρτήσεις. Πράγματι, αν $f(x)$ είναι περιοδική συνάρτηση αποδεικνύεται ότι ισχύει $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx = \infty$. Οι περιοδικές συναρτήσεις έχουν μετασχηματισμό Fourier που όμως δεν υπολογίζεται άμεσα από τον τύπο (2.2) αλλά με τη βοήθεια της έννοιας των **γενικευμένων συναρτήσεων** (*generalized functions*).

Σε ότι ακολουθεί, θα ασχοληθούμε αποκλειστικά με συναρτήσεις που ικανοποιούν και τις τρεις από τις παραπάνω συνθήκες και επομένως ο μετασχηματισμός Fourier μπορεί να υπολογιστεί απλά με ολοκλήρωση από τη σχέση (2.2). Στο σημείο αυτό πρέπει να υπενθυμίσουμε ότι το μη γνήσιο ολοκλήρωμα μίας συνάρτησης από $-\infty$ έως $+\infty$, ορίζεται από τη σχέση:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{M_1, M_2 \to \infty} \int_{-M_1}^{M_2} f(x)dx$$

όπου οι ποσότητες M_1 και M_2 τείνουν στο άπειρο ανεξάρτητα η μία από την άλλη. Σε ορισμένες περιπτώσεις όμως που το παραπάνω ολοκλήρωμα δεν έχει νόημα, είναι απαραίτητο να χρησιμοποιούμε μία περιορισμένη εκδοχή γνωστή ως **πρωτεύουσα τιμή του Cauchy** (*Cauchy principal value*) που ορίζεται ως εξής:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{M \to \infty} \int_{-M}^{M} f(x)dx\,.$$

2.2.2. Παραδείγματα μετασχηματισμών Fourier

<u>Παράδειγμα 2.1.</u>

Σαν ενδεικτικό παράδειγμα, θα υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα Fourier της συνάρτησης που είναι γνωστή και ως **ορθογώνιος παλμός** (*rectangular pulse*)

$$\boxed{f(x) = \Pi_A(x) = \begin{cases} 1, & |x| < A \\ \\ 0, & |x| > A \end{cases}} \tag{2.8}$$

Εφαρμόζοντας τη σχέση (2.2) έχουμε για $\omega \neq 0$:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \Pi_A(x) e^{-i\omega x} dx = \int_{-A}^{A} 1 \cdot e^{-i\omega x} dx = \frac{1}{-i\omega} e^{-i\omega x}\Big|_{-A}^{A} = \frac{1}{i\omega}\left(e^{i\omega A} - e^{-i\omega A}\right)$$

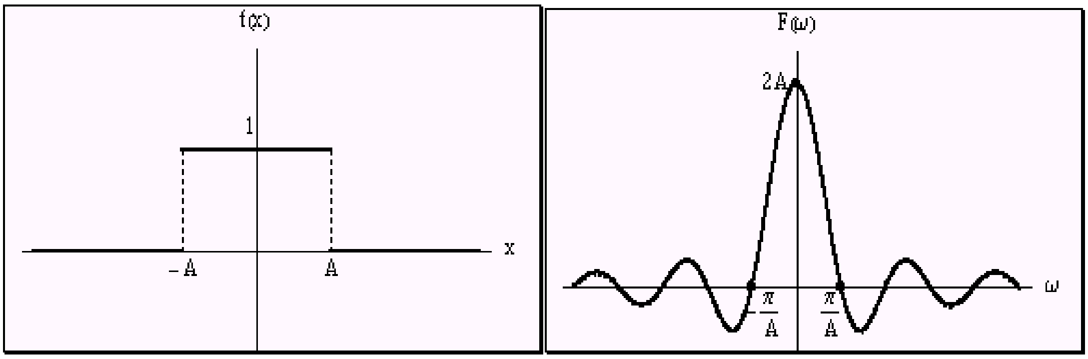
$$= \frac{1}{i\omega}\left(\cos\omega A + i\sin\omega A - \cos\omega A + i\sin\omega A\right) = \frac{2\sin\omega A}{\omega}$$

Για $\omega = 0$, $F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \Pi_A(x)dx = \int_{-A}^{A} dx = 2A$.

Μπορούμε επομένως να γράψουμε:

$$\boxed{\Pi_A(x) \xleftrightarrow{\mathrm{F}} \begin{cases} \dfrac{2\sin\omega A}{\omega}, & \omega \neq 0 \\ \\ 2A, & \omega = 0 \end{cases}} \tag{2.9}$$

Οι γραφικές παραστάσεις των $f(x)$ και $F(\omega)$ δίνονται στο Σχήμα 2.2. (α) - (β).



(α) (β)

Σχήμα 2.2: (α) Η συνάρτηση ορθογώνιου παλμού και (β) ο μετασχηματισμός Fourier αυτής.

Παράδειγμα 2.2.

Μία ακόμη χρήσιμη συνάρτηση που συναντούμε στη θεωρία των μετασχηματισμών Fourier είναι ο **τριγωνικός παλμός** (*triangular pulse*).

$$\boxed{f(x)=\Lambda_A(x)=\begin{cases}1-\dfrac{|x|}{A}, & |x|<A\\ \\ 0, & |x|>A\end{cases}} \tag{2.10}$$

Από τη σχέση (2.2) έχουμε για $\omega \neq 0$:

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\Lambda_A(x)e^{-i\omega x}dx=\int_{-A}^{0}\left(1+\frac{x}{A}\right)\cdot e^{-i\omega x}dx+\int_{0}^{A}\left(1-\frac{x}{A}\right)\cdot e^{-i\omega x}dx$$

$$=\int_{-A}^{0}e^{-i\omega x}dx+\frac{1}{A}\int_{-A}^{0}xe^{-i\omega x}dx+\int_{0}^{A}e^{-i\omega x}dx-\frac{1}{A}\int_{0}^{A}xe^{-i\omega x}dx$$

$$=-\frac{1}{i\omega}e^{-i\omega x}\Big|_{-A}^{0}+\frac{1}{A\omega^2}e^{-i\omega x}(1+i\omega x)\Big|_{-A}^{0}-\frac{1}{i\omega}e^{-i\omega x}\Big|_{0}^{A}-\frac{1}{A\omega^2}e^{-i\omega x}(1+i\omega x)\Big|_{0}^{A}$$

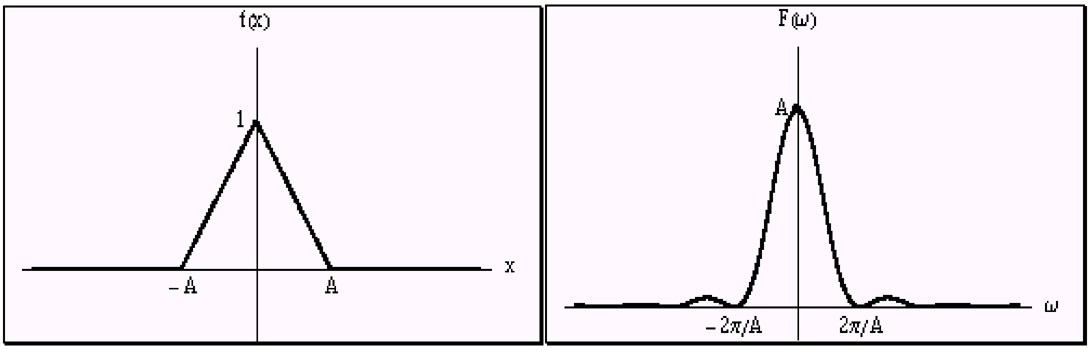
$$=\frac{1}{A\omega^2}\left(2-e^{i\omega A}-e^{-i\omega A}\right)=\frac{2}{A\omega^2}\left(1-\cos\omega A\right)=\frac{4\sin^2(\omega A/2)}{\omega^2 A}$$

και για $\omega=0$: $F(0)=\int_{-\infty}^{\infty}\Lambda_A(x)dx=\int_{-A}^{0}\left(1+\dfrac{x}{A}\right)dx+\int_{0}^{A}\left(1-\dfrac{x}{A}\right)dx=A$.

Άρα:

$$\Lambda_A(x) \overset{F}{\longleftrightarrow} \boxed{\begin{cases} \dfrac{4\sin^2(\omega A/2)}{\omega^2 \eta}, & \omega \neq 0 \\ \\ A, & \omega = 0 \end{cases}} \tag{2.11}$$

Οι γραφικές παραστάσεις των $f(x)$ και $F(\omega)$ δίνονται στο Σχήμα 2.3. (α) - (β)



(α) *(β)*

Σχήμα 2.3: (α) Η συνάρτηση τριγωνικού παλμού και (β) ο μετασχηματισμός Fourier αυτής

2.2.3. Γενική μιγαδική μορφή του μετασχηματισμού Fourier

Στη γενική περίπτωση, η αρχική συνάρτηση $f(x)$ και ο μετασχηματισμός Fourier $F(\omega)$ αυτής μπορούν να είναι μιγαδικές συναρτήσεις. Σε ότι ακολουθεί όμως, θα ασχοληθούμε αποκλειστικά με πραγματικές συναρτήσεις $f(x)$ ενώ θα επιτρέψουμε στο ολοκλήρωμα Fourier να είναι μιγαδική συνάρτηση. Υποθέτουμε δηλαδή ότι στη γενική περίπτωση ο μετασχηματισμός Fourier έχει τη γενική "ορθογώνια" μορφή

$$F(\omega) = R(\omega) + iI(\omega), \tag{2.12}$$

όπου οι συναρτήσεις $R(\omega)$ και $I(\omega)$ είναι το **πραγματικό** (*real*) και το **φανταστικό** (*imaginary*) μέρος αντίστοιχα. Μπορούμε επίσης να παραστήσουμε την $F(\omega)$ με την πολική μορφή της

$$F(\omega) = |F(\omega)| e^{i\phi(\omega)}. \tag{2.13}$$

Τις ιδιότητες των συναρτήσεων αυτών θα τις εξετάσουμε παρακάτω.

Παράδειγμα 2.3.

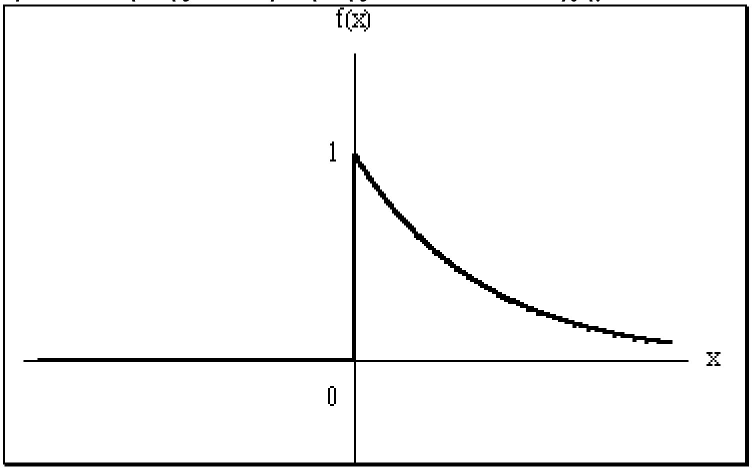
Θα υπολογίσουμε το μετασχηματισμό Fourier της εκθετικής συνάρτησης

$$f(x)=\begin{cases} e^{-mx}, & x>0 \\ 0, & x<0 \end{cases} \qquad (m>0)\,.$$

Με τη βοήθεια της συνάρτησης μοναδιαίου βήματος (2.1) μπορούμε να συμβολίσουμε την ίδια συνάρτηση, χωρίς κλάδους, ως εξής:

$$f(x)=e^{-mx}U(x)\,,\quad m>0$$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης δίνεται στο Σχήμα 2.4



Σχήμα 2.4: Η εκθετική συνάρτηση $f(x)=e^{-mx}U(x)$

Από τη σχέση (2.2) έχουμε:

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx=\int_{0}^{\infty} e^{mx}e^{-i\omega x}dx=\int_{0}^{\infty} e^{-(m+i\omega)x}dx$$

$$=-\frac{1}{m+i\omega}e^{-(m+i\omega)x}\Bigg|_0^{\infty}=\frac{1}{m+i\omega}$$

Εφαρμόζοντας τις ιδιότητες των πράξεων των μιγαδικών αριθμών προκύπτει ότι

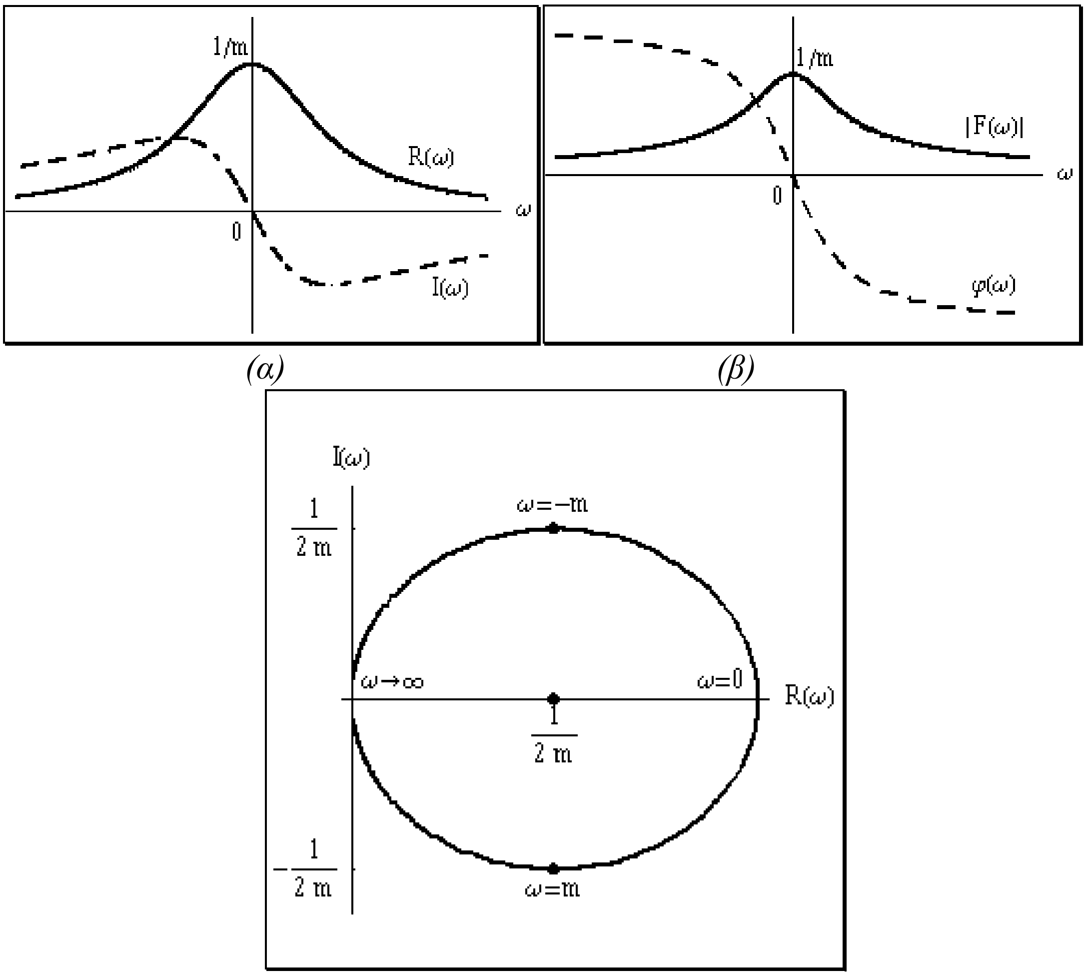
$$R(\omega)=\frac{m}{m^2+\omega^2}\,,\quad I(\omega)=-\frac{\omega}{m^2+\omega^2}\,,\quad |F(\omega)|=\frac{1}{\sqrt{m^2+\omega^2}}\,,\quad \phi(\omega)=-\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{m}\right)$$

δηλαδή

$$F(\omega)=\frac{m}{m^2+\omega^2}-i\frac{\omega}{m^2+\omega^2}=\frac{1}{\sqrt{m^2+\omega^2}}e^{-i\tan^{-1}(\omega/m)}$$

Στα παρακάτω σχήματα, σε εφαρμογή στις συναρτήσεις του παραδείγματος 2.3., φαίνονται διάφοροι τρόποι με τους οποίους μπορούμε να παραστήσουμε γραφικά το ολοκλήρωμα Fourier όταν αυτό είναι μιγαδική συνάρτηση. Στο Σχήμα 2.5 (α) βλέπουμε στο ίδιο σύστημα αξόνων να απεικονίζονται μαζί το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του ολοκληρώματος Fourier. Γενικά συνηθίζεται για το πραγματικό μέρος να χρησιμοποιούμε συνεχή γραμμή ενώ για το φανταστικό διακεκομμένη. Στο (β) βλέπουμε τις αντίστοιχες “πολικές” συναρτήσεις στο ίδιο σύστημα αξόνων. Στο (γ), η γραφική παράσταση γίνεται στο μιγαδικό επίπεδο με άξονες που αντιστοιχούν στις $R(\omega)$ και $I(\omega)$. Η $F(\omega)$ αντιμετωπίζεται σαν παραμετρική συνάρτηση με παράμετρο το ω. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, η γραφική παράσταση είναι κύκλος με κέντρο το σημείο $\left(\frac{1}{2m}, 0\right)$ και ακτίνα $\frac{1}{2m}$. Αυτό μπορούμε να το διαπιστώσουμε εύκολα επαληθεύοντας τη σχέση

$$\left[R(\omega) - \frac{1}{2m}\right]^2 + \left[I(\omega)\right]^2 = \left(\frac{1}{2m}\right)^2$$



(γ)

Σχήμα 2.5: Τρόποι γραφικής παράστασης μιγαδικού ολοκληρώματος Fourier Εφαρμογή στις συναρτήσεις του παραδείγματος 2.3.

2.2.4. Βασικές ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier

Στην παράγραφο αυτή δίνουμε έναν κατάλογο με τις κυριότερες ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier που μπορούν να αποδειχτούν εύκολα από τις σχέσεις ορισμού (2.1) και (2.2). Σε κάθε περίπτωση δεχόμαστε ότι η $f(x)$ είναι πραγματική συνάρτηση ενώ ο μετασχηματισμός Fourier αυτής $F(\omega)$ είναι μιγαδική συνάρτηση.

(1) $R(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\omega x dx$ και $I(\omega) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\omega x dx$

(2) Η $R(\omega)$ είναι άρτια συνάρτηση του *ω:* $R(-\omega) = R(\omega)$.

(3) Η $I(\omega)$ είναι περιττή συνάρτηση του ω: $I(-\omega) = -I(\omega)$.

(4) Η σχέση:

$$F(-\omega) = \overline{F}(\omega),$$

όπου γενικά με $\bar{z}$ συμβολίζουμε το συζυγή του μιγαδικού z, είναι αναγκαία και ικανή συνθήκη για να είναι η $f(x)$ πραγματική.

(5) Η $f(x)$ είναι άρτια αν και μόνο αν η $F(\omega)$ είναι πραγματική. Στην περίπτωση αυτή: $R(\omega) = 2\int_0^\infty f(x)\cos\omega x dx$ και $I(\omega) = 0$.

(6) Η $f(x)$ είναι περιττή αν και μόνο αν η $F(\omega)$ είναι καθαρά φανταστική. Στην περίπτωση αυτή: $R(\omega) = 0$ και $I(\omega) = -2\int_0^\infty f(x)\sin\omega x dx$.

(7) Έστω $f(x)$ μία οποιαδήποτε συνάρτηση, $Ev\{f(x)\} = f_E(x)$ η άρτια συνιστώσα της και $Od\{f(x)\} = f_O(x)$ η περιττή. Τότε ισχύει:

$$f_E(x) \xleftrightarrow{\mathrm{F}} R(\omega) \qquad \text{και} \qquad f_O(x) \xleftrightarrow{\mathrm{F}} iI(\omega)$$

(8) Η $|F(\omega)|$ είναι άρτια συνάρτηση του ω

(9) Η $\phi(\omega)$ είναι περιττή συνάρτηση του ω.

(10) **Γραμμικότητα** (*linearity*): Αν $f_1(x) \xleftrightarrow{\mathrm{F}} F_1(\omega)$ και $f_2(x) \xleftrightarrow{\mathrm{F}} F_2(\omega)$, τότε

$$a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) \xleftrightarrow{F} a_1 F_1(\omega) + a_2 F_2(\omega)$$

όπου a_1 και a_2 είναι αυθαίρετες σταθερές. Η ιδιότητα προφανώς επεκτείνεται για πεπερασμένα αθροίσματα με περισσότερους από δύο όρους.

Αν $f(x) \xleftrightarrow{\mathrm{F}} F(\omega)$ τότε ισχύουν οι ιδιότητες:

(11) **Συμμετρία** (*symmetry*): $F(x) \xleftrightarrow{F} 2\pi f(-\omega)$.

(12) **Μετατόπιση χρόνου** (*time shifting*): $f(x - x_0) \xleftrightarrow{F} F(\omega)e^{-i\omega x_0}$.

(13) **Μετατόπιση συχνότητας** (*frequency shifting*): $f(x)e^{i\omega_0 x} \xleftrightarrow{F} F(\omega - \omega_0)$

(14) **Αλλαγή κλίμακας χρόνου** (*time scaling*): $f(ax) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$ όπου a πραγματικός.

(15) **Παραγώγιση ως προς τον χρόνο και τη συχνότητα** (*time/frequency differentiation*): Ισχύουν οι σχέσεις

$$(i)\quad \frac{d^n f(x)}{dx^n} \xleftrightarrow{F} (i\omega)^n F(\omega) \qquad \text{και} \qquad (ii)\quad (-ix)^n f(x) \xleftrightarrow{F} \frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n}$$

<u>Παράδειγμα 2.4.</u>

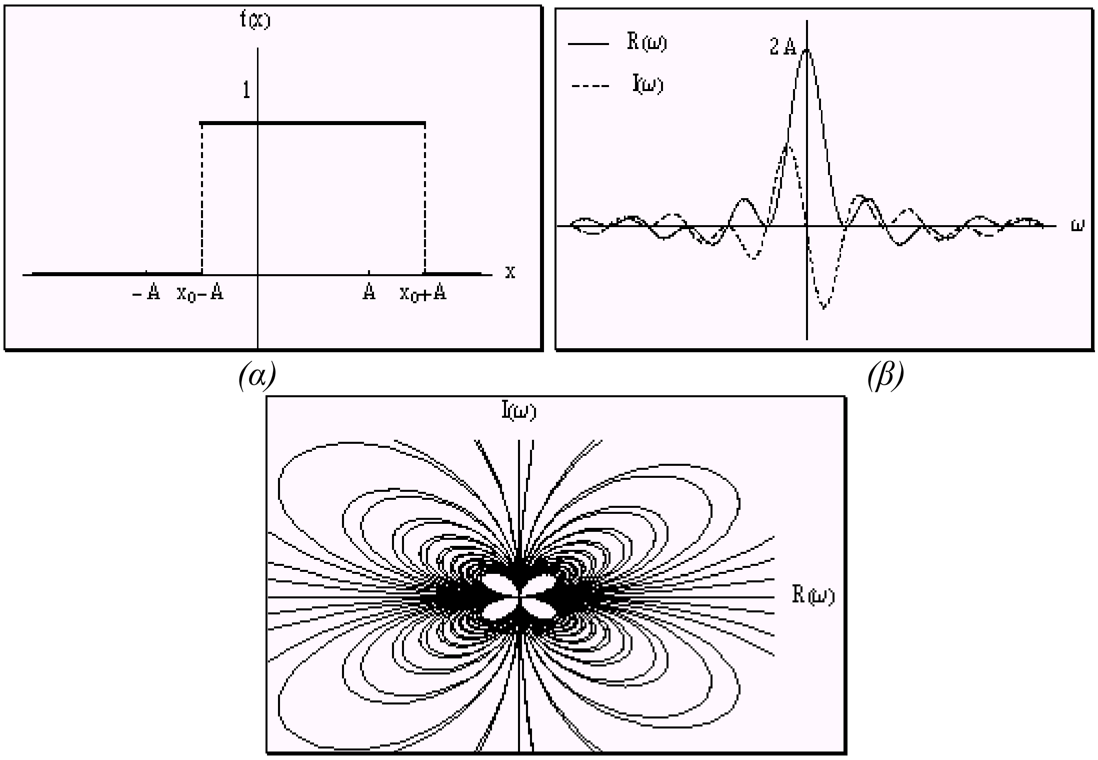
Στο παράδειγμα 2.1. ορίσαμε τον ορθογώνιο παλμό $\Pi_A(x)$ (σχέση (2.8)) και υπολογίσαμε το μετασχηματισμό Fourier (σχέση (2.9)). Από την ιδιότητα της μετατόπισης του χρόνου (ιδιότητα 12) μπορούμε να πάρουμε

$$\Pi_A(x-x_0) \xleftrightarrow{\mathrm{F}} \begin{cases} \dfrac{2\sin\omega A}{\omega}e^{-i\omega x_0}, & \omega \neq 0 \\ 2A, & \omega = 0 \end{cases}$$

για οποιαδήποτε τιμή x_0. Είναι αξιοσημείωτο εδώ ότι ο ορθογώνιος παλμός είναι άρτια συνάρτηση και επομένως ο μετασχηματισμός Fourier είναι πραγματική. Η συνάρτηση όμως που προκύπτει από τη μετατόπιση στο χρόνο και δίνεται από τη σχέση

$$\Pi_A(x-x_0) = \begin{cases} 1, & |x-x_0| < A \\ 0, & |x-x_0| > A \end{cases}$$

παύει να είναι άρτια και άρα ο μετασχηματισμός Fourier είναι μιγαδική συνάρτηση. Στο Σχήμα 2.6 φαίνεται στο (α) η συνάρτηση του ορθογώνιου παλμού μετατοπισμένη κατά x_0, στο (β) το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του ολοκληρώματος Fourier και στο (γ) η παράστασή του στο μιγαδικό επίπεδο με άξονες $R(\omega)$ και $I(\omega)$.



(α) *(β)*

(γ)

Σχήμα 2.6: Μετατόπιση του ορθογώνιου παλμού και ολοκλήρωμα Fourier

Παράδειγμα 2.5.

Θα υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα Fourier της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{\sin xA}{\pi x}$.

Έχουμε, διαδοχικά, χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της συμμετρίας (ιδιότητα 11) στο μετασχηματισμό Fourier του ορθογώνιου παλμού:

$$F(x)\xleftrightarrow{F}2\pi f(-\omega) \;\Rightarrow\; \frac{2\sin xA}{x}\xleftrightarrow{F}2\pi\Pi_A(-\omega) \;\Rightarrow\; \frac{\sin xA}{\pi x}\xleftrightarrow{F}\Pi_A(\omega)$$

(αφού η συνάρτηση $\Pi_A(x)$ είναι άρτια)

Παράδειγμα 2.6.

Θα χρησιμοποιήσουμε την εκθετική συνάρτηση $f(x)$ του παραδείγματος 2.3 για να υπολογίσουμε το μετασχηματισμό Fourier της συνάρτησης $g(x)=e^{-m|x|}$ $(m>0)$. Αν θεωρήσουμε την άρτια συνιστώσα της $f(x)$ θα έχουμε

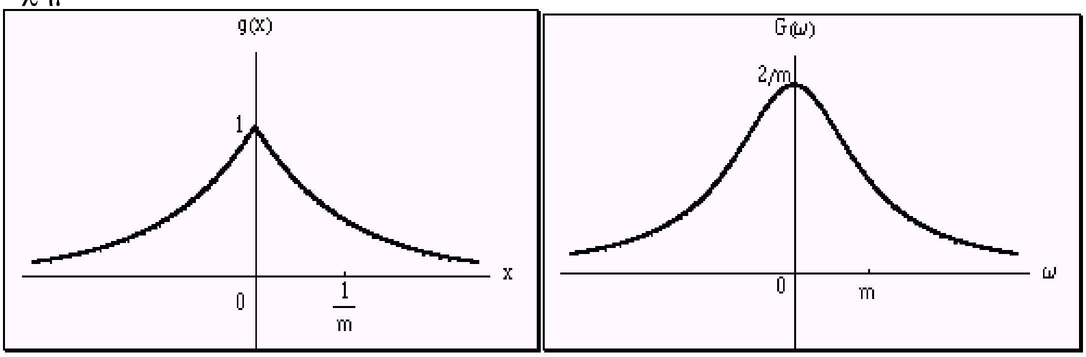
για $x>0$: $\quad Ev\{f(x)\}=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]=\frac{1}{2}[e^{-mx}+0]=\frac{1}{2}e^{-mx}$ και

για $x<0$: $\quad Ev\{f(x)\}=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]=\frac{1}{2}[0+e^{mx}]=\frac{1}{2}e^{mx}$.

Γενικά, $Ev\{f(x)\}=\frac{1}{2}g(x)=\frac{1}{2}e^{-m|x|}$. Αλλά από την ιδιότητα 7, έχουμε ότι ο μετασχηματισμός Fourier της άρτιας συνιστώσας της $f(x)$, είναι το πραγματικό μέρος της $F(\omega)$. Ισχύει επομένως:

$$e^{-m|x|}\xleftrightarrow{F}\frac{2m}{m^2+\omega^2}.$$

Η συνάρτηση $e^{-m|x|}$ και ο μετασχηματισμός της παριστάνονται γραφικά στο Σχήμα 2.7.



Σχήμα 2.7: Η συνάρτηση $e^{-m|x|}$ και ο μετασχηματισμός Fourier αυτής.

Παράδειγμα 2.7.

Αν θεωρήσουμε το μετασχηματισμό Fourier $F(\omega)=\dfrac{1}{m+i\omega}$ της συνάρτησης $f(x)=e^{-mx}U(x)$, $\quad m>0$ (παράδειγμα 2.3), μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε ότι

$$\frac{d^nF(\omega)}{d\omega^n}=\frac{(-i)^n n!}{(m+i\omega)^{n+1}}.$$

Από την ιδιότητα 15 (ii) έχουμε

$$(-ix)^n f(x) \xleftrightarrow{F} \frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n} \Rightarrow (-ix)^n e^{-mx} U(x) \xleftrightarrow{F} \frac{(-i)^n n!}{(m+i\omega)^{n+1}}$$

και τελικά

$$\frac{x^n}{n!} e^{-mx} U(x) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{(m+i\omega)^{n+1}} .$$

2.2.5. Συνημιτονοειδής και ημιτονοειδής μετασχηματισμός Fourier

Αν η $f(x)$ είναι ορισμένη μόνο στο διάστημα $0 < x < \infty$ (κάτι που το συναντάμε πολύ συχνά σε εφαρμογές όταν η ανεξάρτητη μεταβλητή x παριστά χρόνο), μπορούμε να ορίσουμε αυθαίρετα την $f(x)$ στο διάστημα $-\infty < x < 0$ ώστε να είναι άρτια. Τότε, η $f(x)$ μπορεί να παρασταθεί με τον **συνημιτονοειδή μετασχηματισμό Fourier** (*Fourier cosine transform*) $F_c(\omega)$ ο οποίος ορίζεται από το ζεύγος των εξισώσεων:

$$\boxed{F_c(\omega) = \int_0^\infty f(x)\cos\omega x dx} \quad \text{και} \quad \boxed{f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty F_c(\omega)\cos\omega x d\omega} \qquad (2.14)$$

Με όμοιο τρόπο, μπορούμε να ορίσουμε την $f(x)$ στο διάστημα $-\infty < x < 0$ ώστε να είναι περιττή. Στην περίπτωση αυτή, η $f(x)$ μπορεί να παρασταθεί με τον **ημιτονοειδή μετασχηματισμό Fourier** (*Fourier sine transform*) $F_s(\omega)$ ο οποίος ορίζεται από το ζεύγος των εξισώσεων:

$$\boxed{F_s(\omega) = \int_0^\infty f(x)\sin\omega x dx} \quad \text{και} \quad \boxed{f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty F_s(\omega)\sin\omega x d\omega} \qquad (2.15)$$

Και στις δύο περιπτώσεις βέβαια, πρέπει να προσέξουμε ιδιαίτερα στην ερμηνεία των αποτελεσμάτων το γεγονός ότι η $f(x)$ ορίζεται μόνο για θετικά x.

<u>Παράδειγμα 2.8.</u>

Να βρεθεί ο συνημιτονοειδής και ο ημιτονοειδής μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης $f(x) = e^{-mx}$ όπου $0 < x < \infty$ και $m > 0$.

Από τις σχέσεις (2.14) και (2.15) έχουμε:

$$F_c(\omega) = \int_0^\infty e^{-mx}\cos\omega x dx \quad \text{και} \quad F_s(\omega) = \int_0^\infty e^{-mx}\sin\omega x dx .$$

Εφαρμόζοντας κατά παράγοντες ολοκλήρωση και για τα δύο ολοκληρώματα θα πάρουμε:

$$F_c(\omega) = \int_0^\infty e^{-mx}\cos\omega x dx = -\frac{1}{m}\left\{ e^{-mx}\cos\omega x\Big|_0^\infty + \omega\int_0^\infty e^{-mx}\sin\omega x dx \right\} = \frac{1}{m} - \frac{\omega}{m}F_s(\omega)$$

και

$$F_s(\omega) = \int_0^\infty e^{-mx}\sin\omega x dx = -\frac{1}{m}\left\{ e^{-mx}\sin\omega x\Big|_0^\infty - \omega\int_0^\infty e^{-mx}\cos\omega x dx \right\} = \frac{\omega}{m}F_c(\omega) .$$

Λύνοντας το σύστημα των

$$F_c(\omega) = \frac{1}{m} - \frac{\omega}{m}F_s(\omega) \quad \text{και} \quad F_s(\omega) = \frac{\omega}{m}F_c(\omega) ,$$

παίρνουμε

$$F_c(\omega) = \frac{m}{m^2+\omega^2} \qquad \text{και} \qquad F_s(\omega) = \frac{\omega}{m^2+\omega^2}.$$

2.2.6. Συνέλιξη

Έστω $f_1(x)$ και $f_2(x)$ δύο δεδομένες συναρτήσεις. Σαν **συνέλιξη** (*convolution*) των $f_1(x)$ και $f_2(x)$ ορίζεται η συνάρτηση

$$\boxed{f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(u) f_2(x-u)du} \qquad (2.16)$$

η οποία συνήθως εκφράζεται με συμβολικό τρόπο, σαν πράξη μεταξύ δύο συναρτήσεων, στην μορφή

$$\boxed{f(x) = f_1(x) * f_2(x)} \qquad (2.17)$$

Στην ειδική περίπτωση όπου $f_1(x)=0$ και $f_2(x)=0$ για $x<0$, η σχέση (2.16) γίνεται:

$$\boxed{f(x) = f_1(x) * f_2(x) = \int_0^x f_1(u) f_2(x-u)du} \qquad (2.18)$$

Η συνέλιξη σαν πράξη ανάμεσα σε συναρτήσεις έχει μερικές αξιοσημείωτες ιδιότητες:

Αντιμεταθετική (*commutative*): $f_1(x) * f_2(x) = f_2(x) * f_1(x)$

Προσεταιριστική (*associative*): $[f_1(x) * f_2(x)] * f_3(x) = f_1(x) * [f_2(x) * f_3(x)]$

Επιμεριστική (*distributive*): $f_1(x) * [f_2(x) + f_3(x)] = f_1(x) * f_2(x) + f_1(x) * f_3(x)$

Μία σημαντική ειδική περίπτωση, γνωστή ως **ομάλυνση** (*smoothing*) είναι η συνέλιξη μίας αυθαίρετης συνάρτησης $f(x)$ με την συνάρτηση ορθογώνιου παλμού $\Pi_A(x)$. Εύκολα προκύπτει ότι

$$f(x) * \Pi_A(x) = \int_{x-A}^{x+A} f(u)du. \qquad (2.19)$$

Το ολοκλήρωμα μίας συνάρτησης μπορεί να γραφεί σαν συνέλιξη

$$\int_{-\infty}^{x} f(u)du = f(x) * U(x) \qquad (2.20)$$

όπου $U(x)$ είναι η συνάρτηση μοναδιαίου βήματος.

<u>Παράδειγμα 2.9.</u>

Θα υπολογίσουμε την συνέλιξη των συναρτήσεων

$$f_1(x) = e^{-x}U(x) \qquad \text{και} \qquad f_2(x) = xe^{-x}U(x).$$

Οι δύο αυτές συναρτήσεις μηδενίζονται για $x<0$ οπότε θα χρησιμοποιήσουμε τη σχέση (2.18). Για $x>0$ έχουμε:

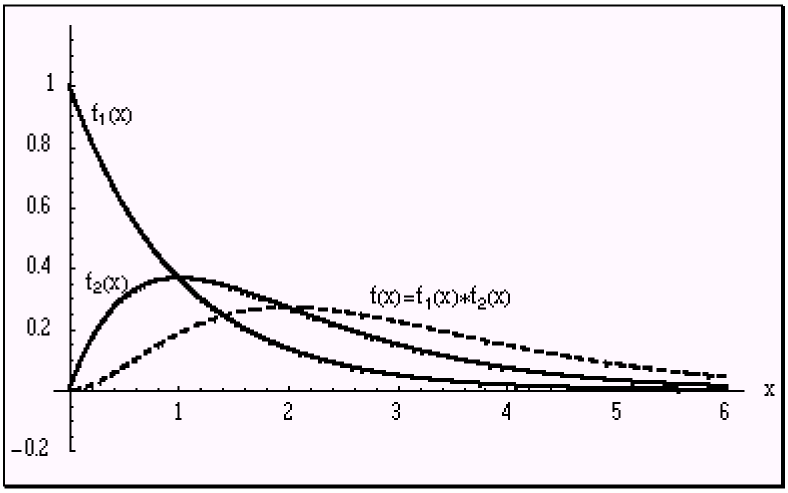
$$f(x) = f_1(x) * f_2(x) = \int_0^x f_1(u) f_2(x-u)du = \int_0^x e^{-u}(x-u)e^{-(x-u)}du$$

$$= \int_0^x (x-u)e^{-x}du = xe^{-x}\int_0^x du - e^{-x}\int_0^x udu = \frac{e^{-x}x^2}{2}$$

ενώ για $x<0$ ισχύει προφανώς $f(x)=0$. Μπορούμε δηλαδή να γράψουμε για συντομία

$$f(x) = e^{-x}U(x) * xe^{-x}U(x) = \frac{e^{-x}x^2}{2}U(x)$$

Στο Σχήμα 2.8. μπορούμε να δούμε τις γραφικές παραστάσεις των δύο συναρτήσεων $f_1(x)$ και $f_2(x)$ καθώς και της συνέλιξής τους (με διακεκομμένη γραμμή).



Σχήμα 2.8: Οι συναρτήσεις $f_1(x) = e^{-x}U(x)$, $f_2(x) = xe^{-x}U(x)$ και η συνέλιξή τους.

<u>Παράδειγμα 2.10.</u>

Θα υπολογίσουμε τώρα την ομάλυνση $\hat{f}_A(x)$ της συνάρτησης $f(x) = e^{-|x|}$ από την συνάρτηση ορθογώνιου παλμού $\Pi_A(x)$, δηλαδή τη συνέλιξή τους, η οποία δίνεται από τη σχέση (2.19). Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις δεδομένου ότι $A>0$:

(i) $|x|<A$ και επομένως $x-A<0$ και $x+A>0$:

$$\hat{f}_A(x) = \int_{x-A}^{x+A} f(u)du = \int_{x-A}^{0} e^{u}du + \int_0^{x+A} e^{-u}du = 2 - e^{-A+x} - e^{-A-x}$$

(ii) $x \geq A$ και επομένως $x-A>0$ και $x+A>0$:

$$\hat{f}_A(x) = \int_{x-A}^{x+A} e^{-u}du = e^{A-x} - e^{-A-x}$$

(iii) $x \leq -A$ και επομένως $x-A<0$ και $x+A<0$:

$$\hat{f}_A(x) = \int_{x-A}^{x+A} e^{u}du = e^{A+x} - e^{-A+x}$$

Συνοψίζοντας, μπορούμε να γράψουμε:

$$\hat{f}_A(x) = \begin{cases} 2 - e^{-A}(e^{x} + e^{-x}), & |x| < A \\ e^{-x}(e^{A} - e^{-A}), & \mathrm{x} > A \\ e^{x}(e^{A} - e^{-A}), & x < -A \end{cases}$$

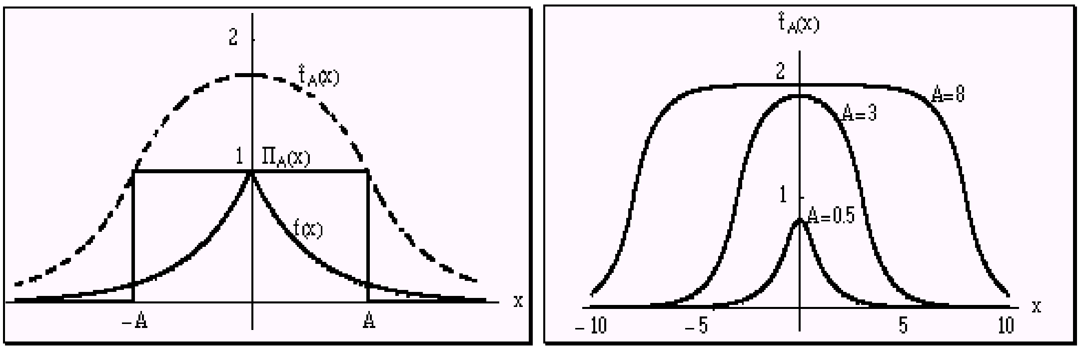
Χρησιμοποιώντας την **συνάρτηση πρόσημου** (*sign function*)

$$\operatorname{sgn}(u) = \begin{cases} +1, & u > 0 \\ 0, & u = 0 \\ -1, & u < 0 \end{cases} \tag{2.21}$$

η συνάρτηση $\hat{f}_A(x)$ μπορεί να γραφεί με πιο συμπαγή μορφή:

$$\hat{f}_A(x) = \operatorname{sgn}(x - A)\left(e^{-|x-A|} - 1\right) + \operatorname{sgn}(x + A)\left(1 - e^{-|x+A|}\right)$$

Στο Σχήμα 2.9 (α) βλέπουμε τις συναρτήσεις $f(x)$ και $\Pi_A(x)$ και τη συνέλιξή τους $\hat{f}_A(x)$ με διακεκομμένη γραμμή. Στο (β) βλέπουμε τη συνάρτηση $\hat{f}_A(x)$ για διάφορες τιμές του Α (Α = 0.5, Α = 3, Α = 8).



(α) *(β)*

Σχήμα 2.9: Ομάλυνση της συνάρτησης $f(x)$: (α) γενικά και (β) για διάφορες τιμές του Α

Θα δώσουμε τώρα δύο πολύ σημαντικά θεωρήματα που συσχετίζουν την πράξη της συνέλιξης με την πράξη του πολλαπλασιασμού μετά από μετασχηματισμό του πεδίου ορισμού.

Το **θεώρημα της συνέλιξης στο χρόνο** (*time convolution theorem*) αναφέρει ότι αν $f_1(x) \xleftrightarrow{\mathrm{F}} F_1(\omega)$ και $f_2(x) \xleftrightarrow{\mathrm{F}} F_2(\omega)$, τότε

$$f_1(x) * f_2(x) \xleftrightarrow{F} F_1(\omega)F_2(\omega) \tag{2.22}$$

Από την ιδιότητα της συμμετρίας προκύπτει το **θεώρημα της συνέλιξης στη συχνότητα** (*frequency convolution theorem*):

$$f_1(x) f_2(x) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2\pi}[F_1(\omega) * F_2(\omega)] \tag{2.23}$$

Η σχέση (2.22) δηλώνει ότι συνέλιξη στο πεδίο του χρόνου (x) αντιστοιχεί σε πολλαπλασιασμό στο πεδίο της συχνότητας (ω). Αντίθετα, η σχέση (2.23) δηλώνει ότι πολλαπλασιασμός στο πεδίο του χρόνου αντιστοιχεί σε συνέλιξη στο πεδίο της συχνότητας.

<u>Παράδειγμα 2.11.</u>

Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$f_1(x) = e^{-ax}U(x) \quad \text{και} \quad f_2(x) = e^{-bx}U(x) \quad (a \neq b > 0).$$

Θα υπολογίσουμε τη συνέλιξη $f(x)$ των δύο συναρτήσεων με δύο τρόπους:

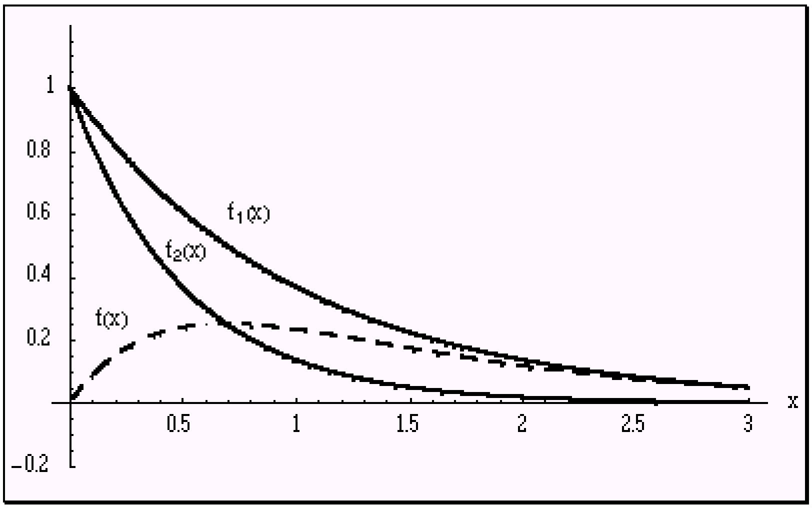
<u>1ος τρόπος</u>. Από τη σχέση υπολογισμού (2.18) της συνέλιξης δύο συναρτήσεων που μηδενίζονται στο διάστημα $x<0$ έχουμε:

$$f(x) = f_1(x) * f_2(x) = \int_0^x e^{-au} e^{-b(x-u)} du = e^{-bx} \int_0^x e^{(b-a)u} du = \frac{1}{b-a}(e^{-ax} - e^{-bx})$$

για $x>0$ και $f(x)=0$ για $x<0$. Δηλαδή τελικά

$$f(x) = \frac{1}{b-a}(e^{-ax} - e^{-bx})U(x)$$

Στο Σχήμα 2.10 βλέπουμε δύο τέτοιες συναρτήσεις και τη συνέλιξή τους



Σχήμα 2.10: Συνέλιξη δύο συναρτήσεων της μορφής $e^{-ax}U(x)$ και $e^{-bx}U(x)$.

<u>2ος τρόπος.</u> Από το παράδειγμα 2.3 γνωρίζουμε ότι

$$F_1(\omega) = \frac{1}{a+i\omega} \quad \text{και} \quad F_2(\omega) = \frac{1}{b+i\omega}.$$

αν $f(x) \stackrel{\mathrm{F}}{\longleftrightarrow} F(\omega)$, τότε σύμφωνα με το θεώρημα της συνέλιξης στο χρόνο (σχέση (2.22)) έχουμε:

$$F(\omega) = F_1(\omega)F_2(\omega) = \frac{1}{(a+i\omega)(b+i\omega)} = \frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{a+i\omega} - \frac{1}{b+i\omega}\right) = \frac{1}{b-a}[F_1(\omega) - F_2(\omega)]$$

Αλλά από τη σχέση (2.1)

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega x} d\omega = \frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega)e^{i\omega x} d\omega - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_2(\omega)e^{i\omega x} d\omega\right) =$$

$$= \frac{1}{b-a}[f_1(x) - f_2(x)] = \frac{1}{b-a}(e^{-ax} - e^{-bx})U(x)$$

Ειδικά για την περίπτωση όπου $a = b > 0$ έχουμε για $x > 0$:

$$f(x)=\int_0^x e^{-au}e^{-a(x-u)}du=e^{-ax}\int_0^x du = xe^{-ax}$$

ενώ για $x<0$, $f(x)=0$, δηλαδή

$$f(x)=xe^{-ax}U(x).$$

Ακόμη από τη σχέση (2.22) προκύπτει αμέσως ότι

$$F(\omega)=\frac{1}{(a+i\omega)^2}.$$

2.2.7. Η ταυτότητα του Parseval

Αντίστοιχη της ταυτότητας του Parseval που αναφέραμε στην παράγραφο 1.3.9 (Σχέση 1.32), είναι η **ταυτότητα του Parseval για τον μετασχηματισμό Fourier.** Αν λοιπόν $f(x)\xleftrightarrow{\mathrm{F}}F(\omega)$, τότε ισχύει:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2d\omega} \qquad (2.24)$$

Η σχέση (2.24) ερμηνεύεται ως εξής στις εφαρμογές: Η συνολική ισχύς (ή ενέργεια) ενός σήματος μπορεί να υπολογιστεί είτε ως προς το χρόνο (x) είτε ως προς τη συχνότητα (ω). Πρέπει να σημειώσουμε ότι με το συμβολισμό $|f(x)|$ εννοούμε το μέτρο μιγαδικής συνάρτησης αφού στη γενική περίπτωση η $f(x)$ μπορεί να είναι μιγαδική. Στην περίπτωση βέβαια που αναφερόμαστε σε πραγματική συνάρτηση, το σύμβολο του μέτρου μπορεί να παραλειφθεί.

Για την περίπτωση των συνημιτονοειδών και ημιτονοειδών μετασχηματισμών Fourier όπως ορίστηκαν στις σχέσεις (2.14) και (2.15), η ταυτότητα του Parseval παίρνει τις εξής μορφές:

$$\boxed{\int_0^{\infty}\{f(x)\}^2dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\{F_c(\omega)\}^2d\omega} \quad \text{και} \quad \boxed{\int_0^{\infty}\{f(x)\}^2dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\{F_s(\omega)\}^2d\omega} \qquad (2.25)$$

<u>Παράδειγμα 2.12,</u>

Θα χρησιμοποιήσουμε την ταυτότητα του Parseval για να αποδείξουμε τις παρακάτω σχέσεις:

$$(α)\ \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\pi, \qquad (β)\ \int_0^{\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^2}=\frac{\pi}{4}, \qquad (γ)\ \int_0^{\infty}\frac{x^2dx}{(1+x^2)^2}=\frac{\pi}{4}.$$

(α) Από τη συνάρτηση $f(x)=e^{-mx}U(x)$, $m>0$ του παραδείγματος 2.3 για $m=1$, έχουμε ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2dx=\int_0^{\infty}e^{-2x}dx=\frac{1}{2}$$

και

$$\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2d\omega=\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{1}{1+\omega^2}-i\frac{\omega}{1+\omega^2}\right|^2d\omega=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{1+\omega^2}.$$

Το ζητούμενο επομένως προκύπτει αμέσως από τη σχέση 2.24.

(β) και *(γ)* Αν χρησιμοποιήσουμε τον συνημιτονοειδή και ημιτονοειδή μετασχηματισμό Fourier της συνάρτησης $f(x)=e^{-mx}$, $0<x<\infty$ για $m=1$, έτσι όπως υπολογίστηκαν στο παράδειγμα 2.8, θα πάρουμε τα ζητούμενα ολοκληρώματα αμέσως από τις σχέσεις (2.25).

2.2.8. Το θεώρημα των ροπών

Ορίζουμε σαν **n-στή ροπή** (*nth moment*) της συνάρτησης $f(x)$ την τιμή

$$\boxed{m_n=\int_{-\infty}^{\infty}x^n f(x)dx, \qquad n=0,1,2,...} \tag{2.26}$$

Το **θεώρημα των ροπών** συνδέει τις παραγώγους του μετασχηματισμού Fourier στο μηδέν με τις ροπές του αντίστροφου μετασχηματισμού. Αν λοιπόν $f(x)\xleftrightarrow{\mathrm{F}}F(\omega)$, τότε ισχύει:

$$\boxed{(-i)^n m_n=F^{(n)}(0)} \tag{2.27}$$

Για $n=0$ η παραπάνω σχέση δίνει: $m_0=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=F(0)$.

Δύο πολύ σημαντικές ποσότητες με εφαρμογές κυρίως στη θεωρία πιθανοτήτων και τη στατιστική είναι η **μέση τιμή** (*mean*)

$$\boxed{\mu=m_1=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx} \tag{2.28}$$

και η **διασπορά** ή **διακύμανση** (*variance/dispersion*) της $f(x)$

$$\boxed{\sigma^2=m_2-m_1^2=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 f(x)dx} \tag{2.29}$$

<u>Παράδειγμα 2.13.</u>

Θα υπολογίσουμε το μετασχηματισμό Fourier της συνάρτησης $f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}$ και στη συνέχεια τη μέση τιμή και την διασπορά της.

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\omega x}dx=\frac{1}{2}\left\{\int_{-\infty}^{0}e^{x}e^{-i\omega x}dx+\int_{0}^{\infty}e^{-x}e^{-i\omega x}dx\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\int_{-\infty}^{0}e^{x(1-i\omega)}dx+\int_{0}^{\infty}e^{-x(1+i\omega)}dx\right\}=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{1-i\omega}e^{x(1-i\omega)}\Big|_{-\infty}^{0}-\frac{1}{1+i\omega}e^{-x(1+i\omega)}\Big|_{0}^{\infty}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{1-i\omega}-\frac{1}{1+i\omega}\right\}=\frac{1}{1+\omega^2}$$

Παραγωγίζοντας έχουμε: $F'(\omega)=-\frac{2\omega}{(1+\omega^2)^2}$ και $F''(\omega)=\frac{2(3\omega^2-1)}{(1+\omega^2)^3}$.

Από τη σχέση (2.27) προκύπτει: $m_1=\frac{1}{(-i)}F'(0)=0$ και $m_2=\frac{1}{(-i)^2}F''(0)=2$.

Άρα η μέση τιμή και η διασπορά είναι:

$$\mu=m_1=0 \qquad \text{και} \qquad \sigma^2=m_2-m_1^2=2-0=2$$

Ασκήσεις

2.1. Να βρεθούν οι μετασχηματισμοί Fourier των συναρτήσεων

(α) $f(x)=\begin{cases} k, & 0<x<a \\ 0, & x\le 0,\ \mathrm{x}\ge a \end{cases}$ *(β)* $f(x)=\begin{cases} e^x, & \mathrm{x}<0 \\ 0, & x\ge 0 \end{cases}$

(γ) $f(x)=\begin{cases} 0, & x<a \\ 1, & \mathrm{a}\le \mathrm{x}<b \\ 0, & \mathrm{x}\ge b \end{cases}$ *(δ)* $f(x)=\begin{cases} \cos(ax), & |x|<T \\ 0, & |x|\ge T \end{cases}$

(ε) $f(x)=\Pi_A(x+2A)+\Pi_A(x-2A)$ (ζ) $f(x)=\begin{cases} 1-x^2, & |x|<1 \\ 0, & |x|>1 \end{cases}$

2.2. Αν $f(x)=\Pi_1(x)$, να δειχτεί ότι $f(x)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\cos(x\omega)\sin\omega}{\omega}d\omega$.

2.3. Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier της $f(x)=e^{-a|x|}$.

2.4. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} 1, & 0\le \mathrm{x}<1 \\ 0, & \mathrm{x}\ge 1 \end{cases}.$$

Να βρεθεί *(α)* Ο συνημιτονοειδής και *(β)* ο ημιτονοειδής μετασχηματισμός Fourier της $f(x)$. Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις της $f(x)$ και των δύο μετασχηματισμών.

2.5. Αν $f(x)\xleftrightarrow{\mathrm{F}}F(\omega)$ να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier των συναρτήσεων $f(x)\cos(\omega_0 x)$ και $f(x)\sin(\omega_0 x)$. Να κάνετε εφαρμογή στην περίπτωση όπου $f(x)$ είναι η συνάρτηση ορθογώνιου παλμού.

2.6. Χρησιμοποιείστε το μετασχηματισμό Fourier της $f(x)$ της Άσκησης 2.1. (ζ) και την ταυτότητα του Parseval για να αποδείξετε τις σχέσεις:

$$(\alpha)\int_0^{\infty}\left(\frac{1-\cos x}{x}\right)^2 dx=\frac{\pi}{2} \quad \text{και} \quad (\beta)\int_0^{\infty}\frac{\sin^4 x}{x^2}dx=\frac{\pi}{4}$$

2.7. Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier των συναρτήσεων

$$(\alpha)\ f(x)=\frac{\sin^2 xA}{\pi x^2 A} \quad \text{και} \quad (\beta)\ f(x)=\frac{1}{a^2+x^2}$$

με χρήση της ιδιότητας της συμμετρίας στις συναρτήσεις (α) τριγωνικού παλμού και (β) της άσκησης 2.3

2.8. Να αποδειχτούν οι παρακάτω σχέσεις:

(α) $x^2 U(x) * e^x U(x) = (2e^x - x^2 - 2x - 2)U(x)$

(β) $\sin(x)U(x) * \sin(x)U(x) = \frac{1}{2}(\sin x - x\cos x)U(x)$

(γ) $(1-x)U(x) * e^x U(x) = xU(x)$

(δ) $U(x) * e^x U(x) = (e^x - 1)U(x)$

(ε) $e^x U(x) * e^x U(x) = xe^x U(x)$

(ζ) $e^x U(x) * e^x U(x) * e^x U(x) = \frac{1}{2} x^2 e^x U(x)$

2.9. Έστω δύο $f_1(x)$ και $f_2(x)$ συναρτήσεις Gauss, δηλαδή της μορφής

$$f_1(x) = \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\sigma_1^2} \qquad \text{και} \qquad f_2(x) = \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\sigma_{21}^2}$$

Να δειχτεί ότι η συνάρτηση $f(x) = f_1(x) * f_2(x)$ είναι επίσης συνάρτηση Gauss και μάλιστα ισχύει: $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\sigma^2}$ όπου $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$.

3. ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE

3.1. Ορισμοί και βασικές ιδιότητες

Έστω συνάρτηση $f(x)$ όπου x είναι πραγματική σταθερά. Τότε, ο **μετασχηματισμός Laplace** (Laplace transformation) της $f(x)$ ορίζεται από την εξίσωση

$$\boxed{F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-sx}dx} \tag{3.1}$$

όπου s είναι μιγαδική μεταβλητή της μορφής $s = \sigma + i\omega$. Συνήθως χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $L\{f(x)\}$ για να αναφερθούμε στον μετασχηματισμό Laplace της $f(x)$.

Αν η μιγαδική μεταβλητή s είναι καθαρά μιγαδική, δηλαδή της μορφής $s = i\omega$ τότε ο μετασχηματισμός Laplace συμπίπτει με το μετασχηματισμό Fourier. Ισχύει δηλαδή

$$\mathcal{F}\{f(x)\} = \mathcal{L}\{f(x)\}_{s=i\omega} \tag{3.2}$$

Αλλά και στην περίπτωση που η μεταβλητή s δεν είναι καθαρά μιγαδική πάλι υπάρχει άμεση σχέση των δύο μετασχηματισμών (Laplace - Fourier). Πράγματι, ισχύει

$$F(\sigma + i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-(\sigma+i\omega)x}dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left[f(x)e^{-\sigma x}\right]e^{-i\omega x}dx$$

δηλαδή

$$\mathcal{F}\left\{f(x)e^{-\sigma x}\right\} = \mathcal{L}\{f(x)\} \tag{3.3}$$

Παράδειγμα 3.1

Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Laplace της

$$f(x) = e^{-mx}U(x) = \begin{cases} e^{-mx}, & x > 0 \\ \\ 0, & x < 0 \end{cases} \qquad (m > 0)$$

Από τη σχέση (3.1) έχουμε:

$$F(s) = F(\sigma + i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-sx}dx = \int_{0}^{\infty} e^{-mx}e^{-sx}dx = \int_{0}^{\infty} e^{-(\sigma+m)x}e^{-i\omega x}dx$$

δηλαδή παρατηρούμε ότι ο μετασχηματισμός Laplace της $f(x)$ είναι ισοδύναμος με το μετασχηματισμό Fourier της

$$e^{-\sigma x}f(x) = e^{-(\sigma+m)x}U(x)$$

που όμως είναι γνωστός από το Παράδειγμα 2.3 και επομένως

$$F(\sigma + i\omega) = \frac{1}{(\sigma + m) + i\omega}, \quad \text{για} \quad (\sigma + m) > 0$$

ή ισοδύναμα

$$F(s) = \frac{1}{m + s} \qquad \text{για} \qquad \mathrm{Re}(s) > -m$$

Από το Παράδειγμα 3.1 προκύπτουν δύο πολύ σημαντικές παρατηρήσεις: *(α)* ο υπολογισμός του μετασχηματισμού Laplace μίας συνάρτησης μπορεί να αναχθεί στον υπολογισμό του μετασχηματισμού Fourier της συνάρτησης πολλαπλασιασμένης με την πραγματική εκθετική συνάρτηση $e^{-\sigma x}$ και *(β)* ότι, όπως και ο μετασχηματισμός Fourier, έτσι και ο μετασχηματισμός Laplace δε συγκλίνει πάντοτε. Στο Παράδειγμα 3.1 συγκλίνει μόνο για $\mathrm{Re}(s) > -m$. Στη συγκεκριμένη περίπτωση το m θα μπορούσε να είναι αρνητικό ή μηδέν, να μην υπάρχει ο μετασχηματισμός Fourier αλλά να υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace.

Παράδειγμα 3.2

Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Laplace της

$$f(x) = -e^{-mx}U(-x) = \begin{cases} -e^{-mx}, & x < 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases} \qquad (m > 0)$$

Από τη σχέση (3.1) έχουμε

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-sx}dx = \int_{-\infty}^{0} -e^{-mx}e^{-sx}dx = -\int_{-\infty}^{0} e^{-(m+s)x}dx$$

και επομένως

$$F(s) = \frac{1}{m+s} \quad \text{για} \quad \mathrm{Re}(s) < -m$$

Παρατηρούμε δηλαδή στα Παραδείγματα 3.1 και 3.2 ότι έχουμε την ίδια ακριβώς έκφραση για τον μετασχηματισμό Laplace αλλά τελείως διαφορετικό πεδίο ορισμού για τη μεταβλητή *s*. Επομένως για τον πλήρη ορισμό του μετασχηματισμού Laplace απαιτείται και το λεγόμενο **πεδίο σύγκλισης,** δηλαδή το επιτρεπτό πεδίο ορισμού της μεταβλητής *s*.

3.2 Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace.

Στην προηγούμενη παράγραφο είδαμε ότι ο μετασχηματισμός Laplace μίας συνάρτησης μπορεί να ερμηνευτεί και σαν μετασχηματισμός Fourier της ίδιας συνάρτησης σταθμισμένης εκθετικά (πολλαπλασιασμένης δηλαδή με την εκθετική συνάρτηση $e^{-\sigma x}$). Αφού όμως υπάρχει ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier (σχέση (2.1)) που μας δίνει την αρχική συνάρτηση, μπορούμε να επεκτείνουμε την έννοια και στον **αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace** με την παρακάτω εξίσωση:

$$f(x) = F^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(s)e^{sx}ds \qquad (3.4)$$

Ο υπολογισμός του ολοκληρώματος αυτού γίνεται με τη βοήθεια του θεωρήματος του ολοκληρωτικού υπολοίπου για τον υπολογισμό επικαμπύλιου ολοκληρώματος στο μιγαδικό επίπεδο.

Στο παράδειγμα που ακολουθεί, θα χρησιμοποιήσουμε μία απλούστερη μέθοδο για την επανάκτηση της συνάρτησης αποφεύγοντας να χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση (3.4).

Παράδειγμα 3.3.

Έστω η συνάρτηση

$$F(s) = \frac{1}{(1+s)(2+s)}, \qquad \mathrm{Re}(s) > -1.$$

Να βρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace.

Αρχικά εκφράζουμε τη συνάρτηση σαν άθροισμα κλασμάτων με παρονομαστές τους δύο παράγοντες του παρονομαστή της $F(s)$. Δηλαδή,

$$F(s) = \frac{1}{(1+s)(2+s)} = \frac{A}{(1+s)} + \frac{B}{(2+s)}.$$

Εύκολα μπορούμε να δούμε εδώ λύνοντας ένα απλό σύστημα ότι $A = 1$ και $B = -1$. Η $F(s)$ μπορεί λοιπόν να γραφεί:

$$F(s) = \frac{1}{(1+s)(2+s)} = \frac{1}{(1+s)} - \frac{1}{(2+s)}$$

Από το Παράδειγμα 3.1 βλέπουμε ότι οι αντίστροφοι μετασχηματισμοί Laplace των $\frac{1}{1+s}$, όπου $\mathrm{Re}(s) > -1$, και $\frac{1}{2+s}$, όπου $\mathrm{Re}(s) > -2$, είναι αντίστοιχα οι συναρτήσεις

$$e^{-x}U(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \qquad \text{και} \qquad e^{-2x}U(x) = \begin{cases} e^{-2x}, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Η τομή των δύο πεδίων σύγκλισης είναι το $\mathrm{Re}(s) > -1$. Επομένως μπορούμε να συμπεράνουμε ότι ο αντίστροφος μετασχηματισμός της $F(s)$ είναι

$$f(x) = \left(e^{-x} - e^{-2x}\right)U(x) = \begin{cases} e^{-x} - e^{-2x}, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

3.3. Ιδιότητες μετασχηματισμού Laplace

Αφού ο μετασχηματισμός Laplace έχει, όπως είδαμε, άμεση σχέση με το μετασχηματισμό Fourier, οι ιδιότητες είναι αντίστοιχες. Μερικές από αυτές δίνονται ενδεικτικά στη συνέχεια

(1) **Ιδιότητα γραμμικού συνδυασμού**:
Αν $\mathcal{L}\{f_1(x)\}=F_1(s)$ και $\mathcal{L}\{f_2(x)\}=F_2(s)$ με πεδία σύγκλισης R_1 και R_2, τότε $\mathcal{L}\{a_1 f_1(x)+a_2 f_2(x)\} = a_1F_1(s)+a_2F_2(s)$ με πεδίο σύγκλισης το $R_1 \cap R_2$.

Αν $\mathcal{L}\{f(x)\} = F(s)$ με πεδίο σύγκλισης R:

(2) **Ιδιότητα μετατόπισης του χρόνου (της x)**:
$\mathcal{L}\{f(x-x_0)\} = F(s)e^{-sx_0}$ με πεδίο σύγκλισης R.

(3) **Ιδιότητα μετατόπισης της s:**
$\mathcal{L}\{e^{s_0x} f(x)\} = F(s-s_0)$ με πεδίο σύγκλισης $R+\mathrm{Re}(s_0)$.

(4) **Ιδιότητα αλλαγής κλίμακας:**
$\mathcal{L}\{f(ax)\} = \dfrac{1}{|a|}F\left(\dfrac{s}{a}\right)$ όπου a πραγματικός με πεδίο σύγκλισης $\dfrac{R}{a}$.

3.4 Μερικοί μετασχηματισμοί Laplace

Στον πίνακα που ακολουθεί, δίνονται μερικά ζεύγη μετασχηματισμών Laplace μαζί με το αντίστοιχο πεδίο σύγκλισης. Όπως είδαμε από το παράδειγμα 3.3, σε πολλές περιπτώσεις μπορούμε να αποφύγουμε τον περίπλοκο υπολογισμό του ολοκληρώματος στη σχέση (3.4) και να πάρουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace σαν γραμμικό συνδυασμό άλλων γνωστών αντίστροφων μετασχηματισμών.

Υπενθυμίζουμε ότι:

$$U(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1, & x>0\end{cases} \qquad \text{και} \qquad U(-x)=\begin{cases}0, & x>0\\ 1, & x<0\end{cases}$$

Μετασχηματισμοί Laplace στοιχειωδών συναρτήσεων		
Συνάρτηση	**Μετασχηματισμός**	**Πεδίο Σύγκλισης**
$U(x)$	$\frac{1}{s}$	$\mathrm{Re}(s)>0$
$-U(-x)$	$\frac{1}{s}$	$\mathrm{Re}(s)<0$
$\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}U(x)$	$\frac{1}{s^n}$	$\mathrm{Re}(s)>0$
$-\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}U(-x)$	$\frac{1}{s^n}$	$\mathrm{Re}(s)<0$
$e^{-mx}U(x)$	$\frac{1}{m+s}$	$\mathrm{Re}(s)>-m$
$-e^{-mx}U(-x)$	$\frac{1}{m+s}$	$\mathrm{Re}(s)<-m$
$\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}e^{-mx}U(x)$	$\frac{1}{(s+m)^n}$	$\mathrm{Re}(s)>-m$
$-\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}e^{-mx}U(-x)$	$\frac{1}{(s+m)^n}$	$\mathrm{Re}(s)<-m$
$[\cos\omega_0 x]U(x)$	$\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$	$\mathrm{Re}(s)>0$
$[\sin\omega_0 x]U(x)$	$\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$	$\mathrm{Re}(s)>0$
$[e^{-mx}\cos\omega_0 x]U(x)$	$\frac{s+m}{(s+m)^2+\omega_0^2}$	$\mathrm{Re}(s)>-m$
$[e^{-mx}\sin\omega_0 x]U(x)$	$\frac{\omega_0}{(s+m)^2+\omega_0^2}$	$\mathrm{Re}(s)>-m$

Βιβλιογραφία

Bracewell, R. N. (1986). *The Fourier Transform and its Applications*, McGraw-Hill, Inc., Singapore.

Courant, R. & John F. (1989). Introduction to Calculus and Analysis, Vol. I, Springer – Verlag, New York.

Franklin, P. (1958). *An Introduction to Fourier Methods and the Laplace Transformation*, Dover Publications, Inc., New York.

Hsu H. P. (1970). *Fourier Analysis*, Simon and Schuster Inc., New York.

Lanczos, C. (1966). *Discourse on Fourier Series*, Oliver & Boyd, Edinburgh and London

Papoulis, A. (1962). The Fourier Integral and its Applications, McGraw-Hill, Inc.

Oppenheim, A. V. & A. S. Willsky (1983). *Signals and Systems*, Prentice-Hall International Inc.

Spiegel M. R. (1974) (Μετ. Περσίδης, Σ. 1978). *Ανάλυση Fourier*, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, New York - ΕΣΠΙ, Αθήνα.

Spiegel M. R. (1974). *Theory and Problems of Advanced Calculus*, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, New York.