

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

Πανεπιστημιακές παραδόσεις
για το μάθημα

ΑΝΩΤΕΡΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ II

Διανυσματικός Λογισμός
Λογισμός Συναρτήσεων Πολλών Μεταβλητών

Ελευθέριος Αγγελής
Επίκουρος Καθηγητής ΑΠΘ

Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο 1

Σημεία και Διανύσματα στον Ευκλείδειο Χώρο

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε την έννοια του σημείου και του διανύσματος στον Ευκλείδειο χώρο. Θα δοθούν οι βασικοί ορισμοί και ιδιότητες των διανυσμάτων καθώς και οι βασικές πράξεις όπως η πρόσθεση, ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός, το εσωτερικό και εξωτερικό γινόμενο. Οι ιδιότητες αυτές θα εξεταστούν αλγεβρικά και γεωμετρικά. Το υλικό του κεφαλαίου θα χρησιμοποιηθεί για τη γεωμετρική κατανόηση των εννοιών της πολυμεταβλητής ανάλυσης των επόμενων κεφαλαίων.

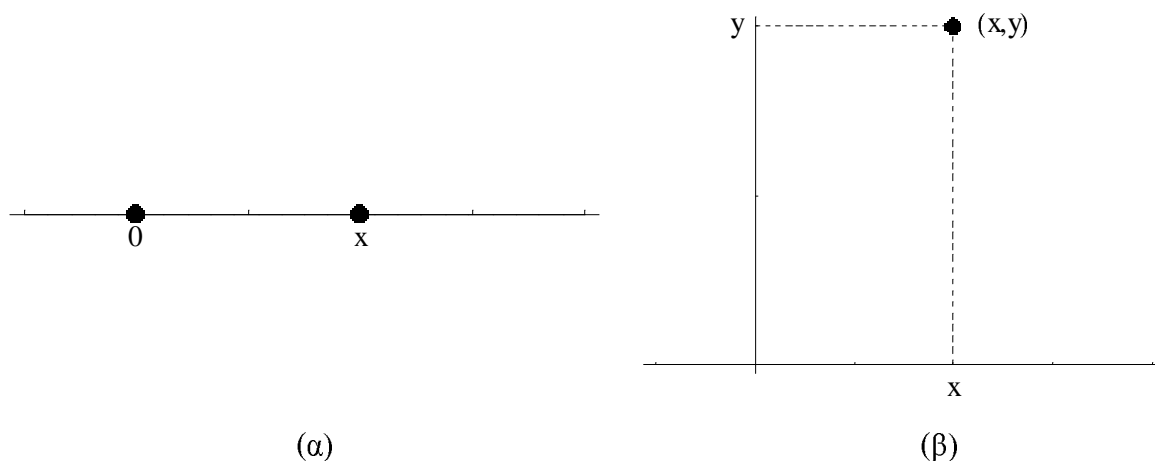
§1.1. Ορισμός των σημείων στον n -χώρο

Είναι γνωστό ότι ένας πραγματικός αριθμός x μπορεί να παραστήσει ένα σημείο P πάνω σε ευθεία γραμμή εφόσον έχει οριστεί πρωτύτερα μία μονάδα μήκους και ένα αρχικό σημείο O το οποίο παριστά τον αριθμό μηδέν (Σχ. 1.1 (α)). Ένα ζεύγος πραγματικών αριθμών (x, y) μπορεί να παραστήσει ένα σημείο του επιπέδου (Σχ. 1.1 (β)). Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να παραστήσουμε τα σημεία του χώρου με τριάδες πραγματικών αριθμών (x, y, z) , αρκεί βέβαια να εισάγουμε έναν επιπλέον άξονα (Σχ. 1.2).

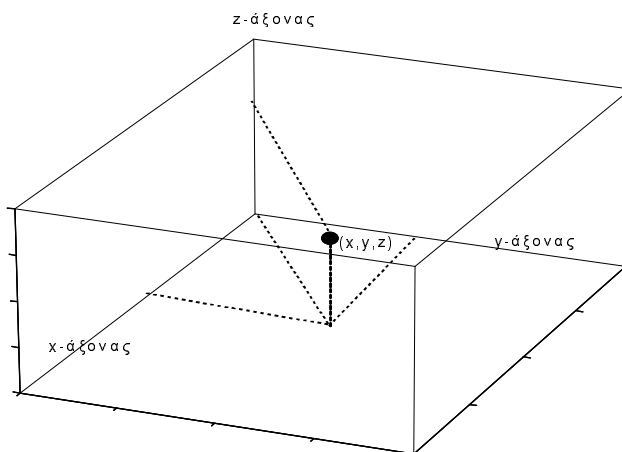
Η ευθεία γραμμή με τα σημεία της να αντιστοιχούν στους πραγματικούς αριθμούς συμβολίζεται με \mathbf{R}^1 (και βέβαια συμπίπτει με το σύνολο των πραγματικών αριθμών \mathbf{R}) και ονομάζεται **Ευκλείδειος 1-χώρος**. Το σύνολο όλων των διαταγμένων ζευγών (x, y) που αντιστοιχούν στα σημεία του επιπέδου ονομάζεται **Ευκλείδειος 2-χώρος** και συμβολίζεται με \mathbf{R}^2 . Το σύνολο των διαταγμένων τριάδων (x, y, z) που παριστούν τα σημεία του τρισδιάστατου χώρου ονομάζεται **Ευκλείδειος 3-χώρος** και συμβολίζεται με \mathbf{R}^3 . Παρόλο

1. Σημεία και Διανύσματα στον Ευκλείδειο Χώρο

που είναι αδύνατο να σχεδιάσουμε σημεία σε χώρο περισσότερων διαστάσεων, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι μία διαταγμένη n -άδα πραγματικών αριθμών (x_1, x_2, \dots, x_n) παριστά ένα σημείο στον **Ευκλείδειο n -χώρο** ο οποίος συμβολίζεται με \mathbf{R}^n . Τα σημεία θα συμβολίζονται γενικά με κεφαλαία γράμματα. Οι αριθμοί x_1, x_2, \dots, x_n ονομάζονται **Καρτεσιανές συντεταγμένες** του σημείου $P = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.



Σχήμα 1.1: (α) Σημείο σε γραμμή και (β) σημείο σε επίπεδο



Σχήμα 1.2: Σημείο στον τρισδιάστατο χώρο

Στα επόμενα κεφάλαια θα ασχοληθούμε κυρίως με έννοιες και μεθόδους όπου $n = 2$ ή $n = 3$. Οι έννοιες και οι μέθοδοι που θα συναντήσουμε μπορούν να επεκταθούν, συνήθως με απλό τρόπο σε χώρους περισσότερων διαστάσεων.

Παράδειγμα 1.1.

Το πλέον συνηθισμένο και κατανοητό παράδειγμα Ευκλείδειου 3-χώρου είναι ο χώρος τριών διαστάσεων μέσα στον οποίο ζούμε. Αν επιλέξουμε ένα κατάλληλο αρχικό σημείο και ένα σύστημα ορθογώνιων αξόνων, μπορούμε να περιγράψουμε την θέση ενός σημείου (σώμα, αντικείμενο, κλπ) με 3 συντεταγμένες. Είναι εύκολο να επεκτείνουμε αυτόν τον χώρο σε χώρο 4 διαστάσεων θεωρώντας 4η συντεταγμένη τον χρόνο. Φυσικά πρέπει να επιλέξουμε αυθαίρετα και το κατάλληλο αρχικό σημείο, για παράδειγμα την γέννηση του Χριστού. Ένα σημείο π.Χ. θα έχει αρνητική συντεταγμένη χρόνου είναι ένα σημείο μ.Χ. θετική. Σε κάποιες περιπτώσεις θα μπορούσε να είναι πρόσφορη επιλογή αρχικού σημείου η γέννηση του ηλιακού συστήματος ή ακόμη της γης, εφόσον βέβαια αυτή μπορεί να καθοριστεί με ακρίβεια.

Εδώ πρέπει να τονίσουμε ότι είναι εσφαλμένη η αντίληψη ότι σε κάθε περίπτωση η 4η διάσταση είναι ο χρόνος. Σε συγκεκριμένες εφαρμογές σε διαφορετικούς επιστημονικούς χώρους, οι διαστάσεις ενός Ευκλείδειου χώρου είναι γενικά τα χαρακτηριστικά του προβλήματος που μελετούμε. Για παράδειγμα, στην οικονομία θα μπορούσαμε να αντιμετωπίσουμε μία κατάσταση όπου οι διαστάσεις του χώρου θα αντιπροσώπευαν τα έξοδα σε πρώτες ύλες συγκεκριμένων βιομηχανιών για ένα έτος. Τα σημεία αυτού του χώρου θα ήταν τότε τα έτη, με συντεταγμένες τις τιμές των εξόδων που αντιστοιχούν σε κάθε βιομηχανία.

Θα ορίσουμε τώρα τις βασικές πράξεις με σημεία και θα δώσουμε τις βασικές ιδιότητές τους.

Πρόσθεση σημείων: Αν A, B δύο σημεία στον Ευκλείδειο n -χώρο ($A, B \in R^n$),

$$A = (a_1, a_2, \dots, a_n) \quad \text{και} \quad B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$$

τότε σαν $A + B$ ορίζεται το σημείο με συντεταγμένες $(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$.

Βαθμωτός πολλαπλασιασμός πραγματικού αριθμού με σημείο του R^n : Αν $c \in R$ και $A \in R^n$ τότε σαν cA ορίζεται το σημείο με συντεταγμένες $(ca_1, ca_2, \dots, ca_n)$.

Οι **βασικές ιδιότητες** που ικανοποιούνται από την πρόσθεση και τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό και μπορούν να αποδειχτούν πολύ εύκολα είναι:

$$(1) (A + B) + C = A + (B + C) .$$

$$(2) A + B = B + A .$$

$$(3) c(A + B) = cA + cB$$

$$(4) (c_1 + c_2)A = c_1A + c_2A \quad \text{και} \quad (c_1c_2)A = c_1(c_2A) .$$

(5) Αν $O = (0, 0, \dots, 0)$ το σημείο με όλες τις συντεταγμένες 0, τότε $O + A = A + O = A$ για όλα τα σημεία A .

(6) $1 \cdot A = A$ και αν συμβολίσουμε με $-A = (-1)A$, τότε $A + (-A) = O$.

Από την ιδιότητα (6) μπορούμε να ορίσουμε και την πράξη της **αφαίρεσης** σημείων:

$$A - B = A + (-B) .$$

Παράδειγμα 1.2.

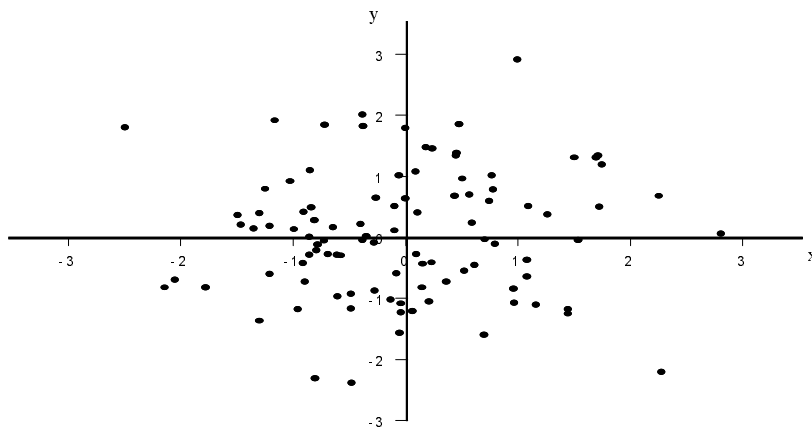
Θα δούμε την επίδραση που έχει η πρόσθεση και ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός σε ένα σύνολο σημείων στο επίπεδο και στο χώρο. Στο Σχήμα 1.3 (α) βλέπουμε ένα σμήνος σημείων τυχαία κατανεμημένων γύρω από την αρχή των αξόνων. Αν P ένα οποιοδήποτε από τα σημεία αυτά, θέλουμε να παραστήσουμε το αποτέλεσμα των πράξεων $0.5 \cdot P + (1, 1.5)$. Στο πλαίσιο (β) του ίδιου σχήματος οι συντεταγμένες κάθε σημείου έχουν πολλαπλασιαστεί με 0.5. Παρατηρούμε ότι οι αποστάσεις των σημείων από την αρχή των αξόνων έχουν συρρικνωθεί στο μισό της αρχικής απόστασης. Στο πλαίσιο (γ) φαίνεται η επίδραση που έχει στα νέα σημεία (μετά τον πολλαπλασιασμό) η πρόσθεσή τους με το σημείο $(1, 1.5)$. Παρατηρούμε ότι έχουμε μετατόπιση των σημείων και μάλιστα το σμήνος τους φαίνεται ότι διατηρεί τον σχηματισμό του πλαισίου (β) αλλά τώρα γύρω από ένα νέο κέντρο αξόνων (διακεκομμένες ευθείες στο σχήμα), το $(1, 1.5)$.

Γενικά, ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός σημείων με αριθμό θετικό μικρότερο της μονάδας συρρικνώνει την απόσταση, ενώ με αριθμό μεγαλύτερο της μονάδας τη μεγεθύνει. Ο πολλαπλασιασμός με αρνητικό αριθμό έχει το ίδιο αποτέλεσμα, με τη διαφορά ότι το νέο σημείο βρίσκεται στην αντίθετη κατεύθυνση από το αρχικό. Στο Σχήμα 1.4 (α) βλέπουμε ένα σχηματισμό από σημεία στο επίπεδο. Στο πλαίσιο (β) τα σημεία έχουν πολλαπλασιαστεί με

-0.5 , οπότε η απόστασή τους από την αρχή των αξόνων έχει συρρικνωθεί αλλά και η διεύθυνσή τους έχει γίνει αντίθετη με την αρχική.

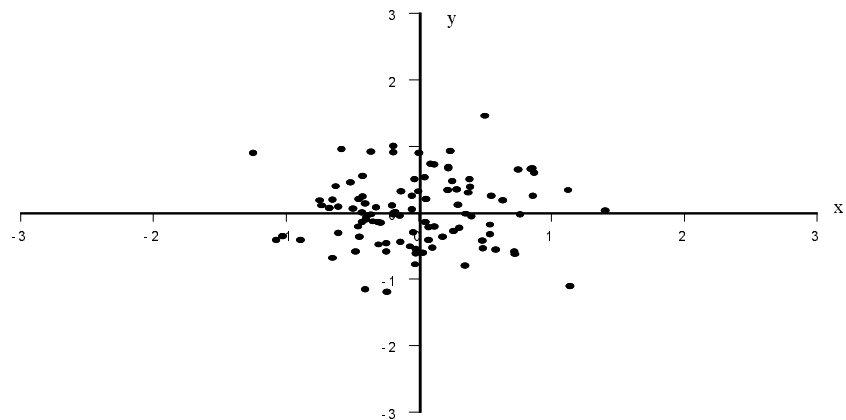
Παρόμοιες πράξεις μπορούμε να δούμε για τον 3-χώρο στο Σχήμα 1.5. Στο πλαίσιο (α) φαίνεται ένα σύνολο σημείων στον τρισδιάστατο χώρο ενώ στο (β) φαίνεται το αποτέλεσμα των πράξεων $0.5 \cdot P + (2, 2.5, 1.8)$. Ο πολλαπλασιασμός με το 0.5 συρρικνώνει τα σημεία στο μισό της αρχικής τους απόστασης από την αρχή των αξόνων ενώ η πρόσθεση με το $(2, 2.5, 1.8)$ μετατοπίζει τα σημεία προς αυτό.

Η γεωμετρική παράσταση της πρόσθεσης δύο σημείων στο επίπεδο είναι ένα παραλληλόγραμμο. Στο Σχήμα 1.6 βλέπουμε την πρόσθεση των σημείων $A = (2, 3)$ και $B = (-1, 1)$. Το άθροισμά τους $A + B = (1, 4)$ βρίσκεται στην τέταρτη κορυφή του παραλληλογράμμου που σχηματίζεται από τα σημεία O , A και B . Η γεωμετρική παράσταση του πολλαπλασιασμού ενός σημείου με αριθμό φαίνεται στο Σχήμα 1.7. Το σημείο $A = (1, 2)$ πολλαπλασιάζεται με τους αριθμούς 0.5 , 0.5 , και 3 . Ο πολλαπλασιασμός με το 0.5 μειώνει την απόσταση του σημείου από την αρχή στο μισό της αρχικής ενώ με το 3 αυξάνει την απόσταση στο τριπλάσιο της αρχικής. Ο πολλαπλασιασμός με το -0.5 αντιστρέφει τη διεύθυνση του σημείου.

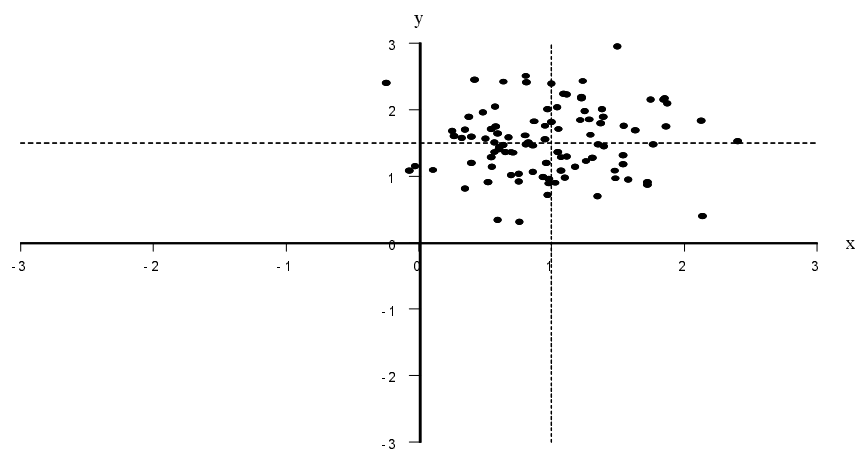


(α)

1. Σημεία και Διανύσματα στον Ευκλείδειο Χώρο

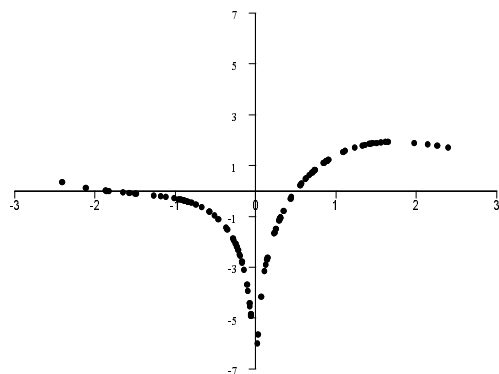


(β)

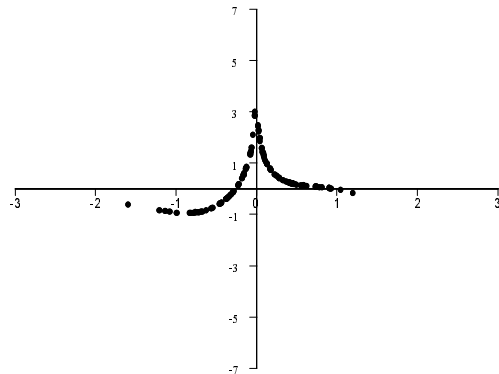


(γ)

Σχήμα 1.3: Βαθμωτός πολλαπλασιασμός και πρόσθεση σημείων στο επίπεδο

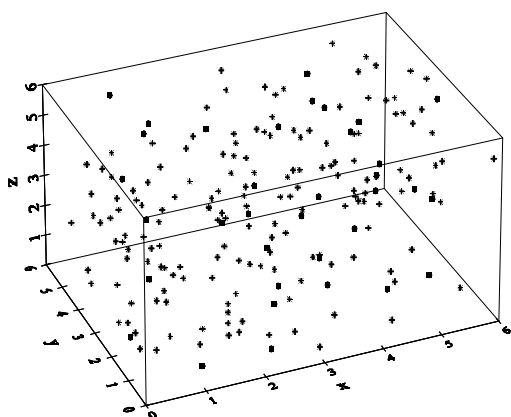


(α)

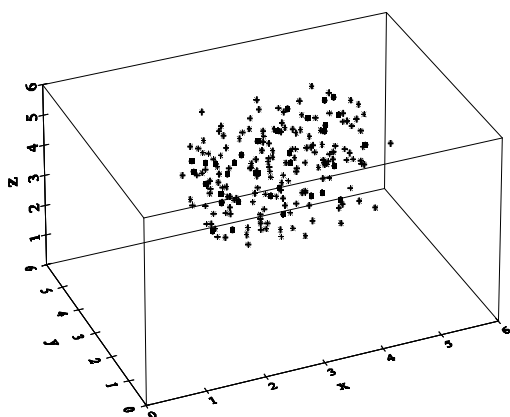


(β)

Σχήμα 1.4: Βαθμωτός πολλαπλασιασμός σημείων με αρνητικό αριθμό

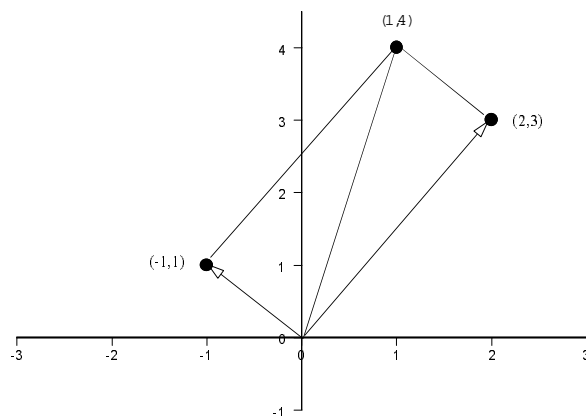


(α)

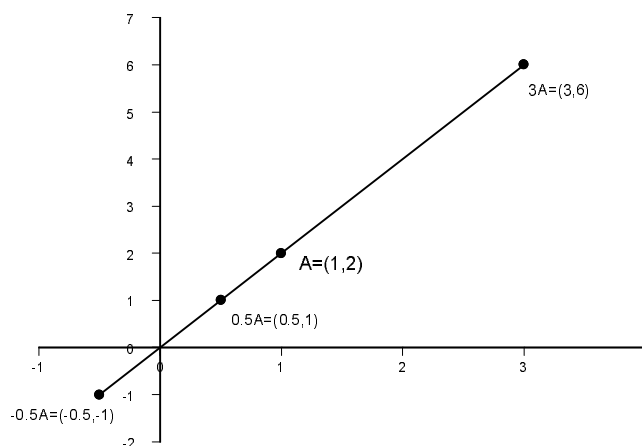


(β)

Σχήμα 1.5: Βαθμωτός πολλαπλασιασμός και πρόσθεση σημείων στο χώρο



Σχήμα 1.6: Πρόσθεση σημείων στο επίπεδο με τον κανόνα του παραλληλογράμμου



Σχήμα 1.7: Βαθμωτός πολλαπλασιασμός σημείου με αριθμούς

§1.2. Διανύσματα

Ορίζουμε σαν **διάνυσμα** \overrightarrow{AB} ένα ευθύγραμμο τμήμα από το σημείο A μέχρι το σημείο B . Είναι δηλαδή ένα ευθύγραμμο τμήμα με καθορισμένο μήκος και κατεύθυνση. Εναλλακτικά, μπορούμε να ορίσουμε το διάνυσμα σαν διατεταγμένο ζεύγος σημείων. Το σημείο A ονομάζεται **αρχικό σημείο** ενώ το B ονομάζεται **τελικό σημείο**. Η απόσταση ανάμεσα στα

σημεία A και B ονομάζεται **μήκος** ή **μέτρο** του διανύσματος \overrightarrow{AB} και συμβολίζεται με $|\overrightarrow{AB}|$.

Το διάνυσμα παριστάνεται με βέλος του οποίου η αιχμή βρίσκεται στο τελικό σημείο.

Δύο διανύσματα \overrightarrow{AB} και \overrightarrow{CD} ονομάζονται **ισοδύναμα** αν έχουν το ίδιο μέτρο και την ίδια κατεύθυνση. Τα διανύσματα είναι ισοδύναμα αν $B - A = D - C$. Τη σχέση ισοδυναμίας ανάμεσα στα δύο διανύσματα τη συμβολίζουμε με $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$. Με τη βοήθεια της ισοδυναμίας, μπορούμε να μεταφέρουμε όλα τα διανύσματα στην αρχή των αξόνων αφού κάθε διάνυσμα \overrightarrow{AB} είναι ισοδύναμο με ένα άλλο του οποίου το αρχικό σημείο είναι η αρχή των αξόνων O . Πράγματι, ισχύει $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{O(B-A)}$. Στο Σχήμα 1.8, (α) βλέπουμε τυχαία διανύσματα στο επίπεδο και στο (β) τα ισοδυνάμιά τους με αρχικό σημείο την αρχή των αξόνων, O .

Δύο διανύσματα \overrightarrow{AB} και \overrightarrow{CD} ονομάζονται **παράλληλα** αν υπάρχει ένας αριθμός $r \neq 0$ τέτοιος ώστε $B - A = r(D - C)$. Πιο συγκεκριμένα, λέμε ότι έχουν την **ίδια κατεύθυνση** αν $r > 0$, ενώ αν $r < 0$, έχουν **αντίθετη κατεύθυνση**.

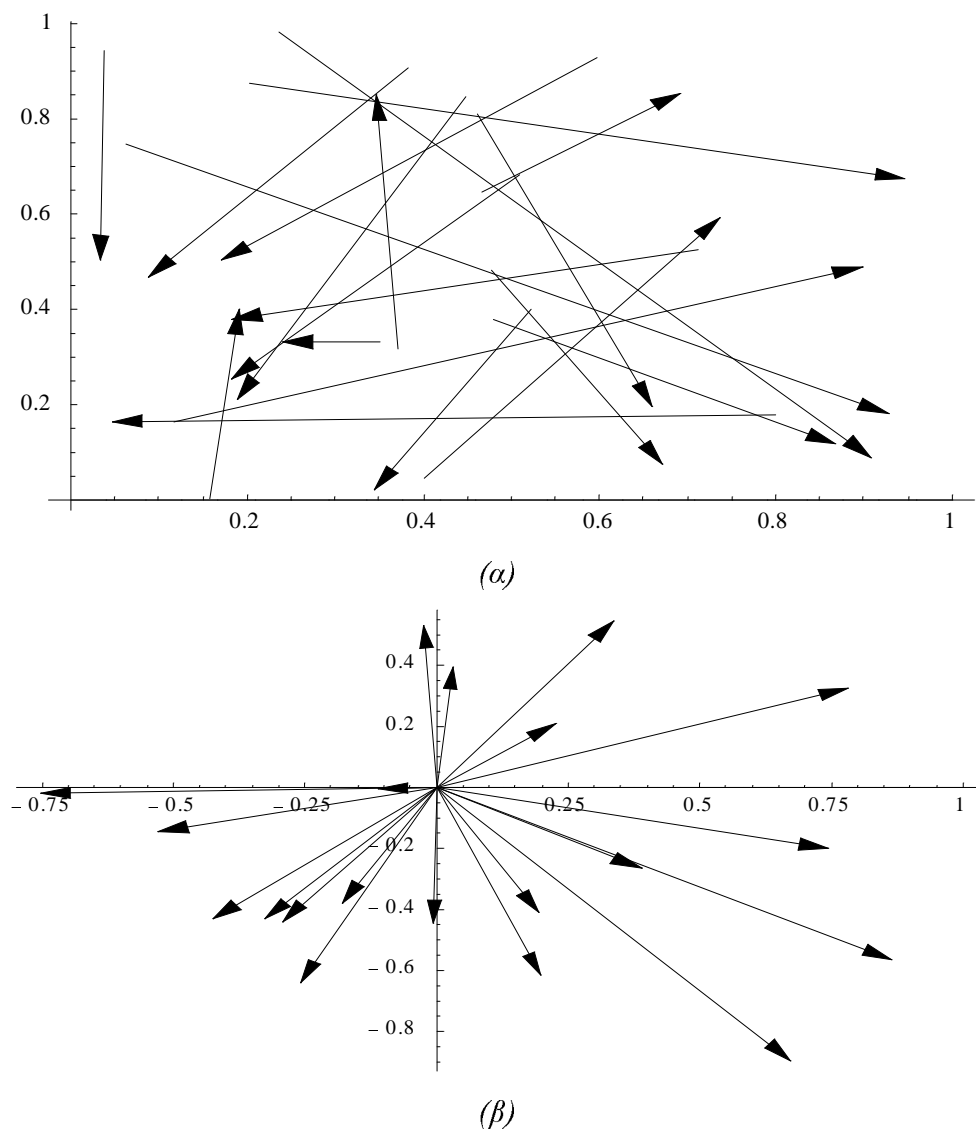
Όπως αναφέραμε και παραπάνω, μπορούμε να μεταφέρουμε οποιοδήποτε διάνυσμα στην αρχή των αξόνων παίρνοντας το ισοδυνάμιο του εκεί. Κάθε διάνυσμα όμως του οποίου το αρχικό σημείο είναι το O , καθορίζεται πλήρως από το τελικό σημείο του. Από εδώ και στο εξής λοιπόν, όταν περιγράφουμε ιδιότητες διανυσμάτων, θα αναφερόμαστε σε n-άδες που παριστούν το τελικό σημείο των διανυσμάτων. Δηλαδή, αντί να μιλάμε για το διάνυσμα \overrightarrow{AB} , θα αναφέρουμε σαν διάνυσμα το σημείο $B - A$ στον Ευκλείδειο n-χώρο. Γενικά, το διάνυσμα \overrightarrow{OP} , αναφέρεται και σαν **διάνυσμα θέσης** του σημείου P .

Αν θεωρήσουμε δύο διανύσματα $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ και $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, ορίζουμε το **εσωτερικό γινόμενο** τους

$$A \cdot B = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n$$

Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι πραγματικός αριθμός με τις εξής ιδιότητες:

- (α) $A \cdot B = B \cdot A$
- (β) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C = (B + C) \cdot A$
- (γ) $(xA) \cdot B = x(A \cdot B)$ και $A \cdot (xB) = x(A \cdot B)$, $x \in R$
- (δ) $A \cdot A \geq 0$ (η ισότητα ισχύει αν $A = O$, όπου O το μηδενικό διάνυσμα)



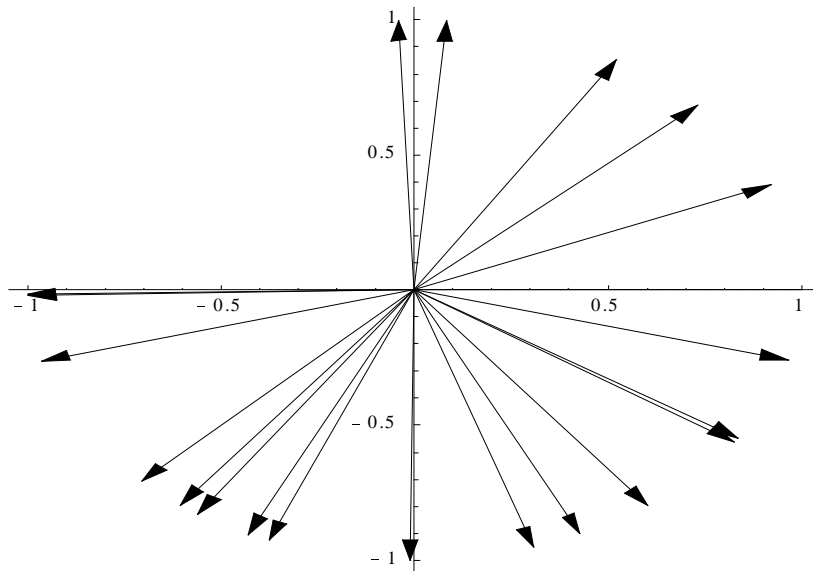
Σχήμα 1.8: (α) Διανύσματα στο επίπεδο (β) τα ισοδύναμά τους με αρχή το O

Ονομάζουμε δύο διανύσματα **κάθετα** ή **ορθογώνια**, αν $A \cdot B = 0$.

Το μήκος του διανύσματος A που ορίσαμε προηγούμενα, μπορεί να υπολογιστεί με τη βοήθεια του εσωτερικού γινομένου.

$$|A| = \sqrt{A \cdot A} = \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}$$

Ένα διάνυσμα E ονομάζεται **μοναδιαίο** όταν $|E|=1$. Εύκολα μπορούμε να μετατρέψουμε ένα διάνυσμα A σε μοναδιαίο, πολλαπλασιάζοντάς το με $1/|A|$. Στο Σχήμα 1.9, τα διανύσματα του Σχήματος 1.8 (β) έχουν γίνει μοναδιαία με τον τρόπο που αναφέραμε. Παρατηρούμε ότι τα τελικά τους σημεία βρίσκονται πάνω σε περιφέρεια κύκλου με ακτίνα 1.



Σχήμα 1.9: Μοναδιαία διανύσματα στο επίπεδο

Αν A και B είναι δύο σημεία (n -άδες), τότε ορίζουμε σαν **απόσταση** των δύο σημείων:

$$|A - B| = \sqrt{(A - B) \cdot (A - B)} = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + \dots + (a_n - b_n)^2}$$

Σημειώστε ότι η παραπάνω απόσταση είναι ακριβώς η ίδια με το μήκος του διανύσματος \overrightarrow{AB} .

Αν δίνονται δύο διανύσματα A και B , ορίζουμε σαν **προβολή** του A πάνω στο B , το διάνυσμα cB όπου c είναι ο αριθμός $c = \frac{A \cdot B}{B \cdot B}$. Ο αριθμός c ονομάζεται **συνιστώσα** του A κατά μήκος του B . Αν το B είναι μοναδιαίο διάνυσμα, τότε $c = A \cdot B$.

Παράδειγμα 1.3

Αν $A = (1, 2)$ και $B = (3, 1/2)$, τότε η συνιστώσα του A κατά μήκος του B είναι

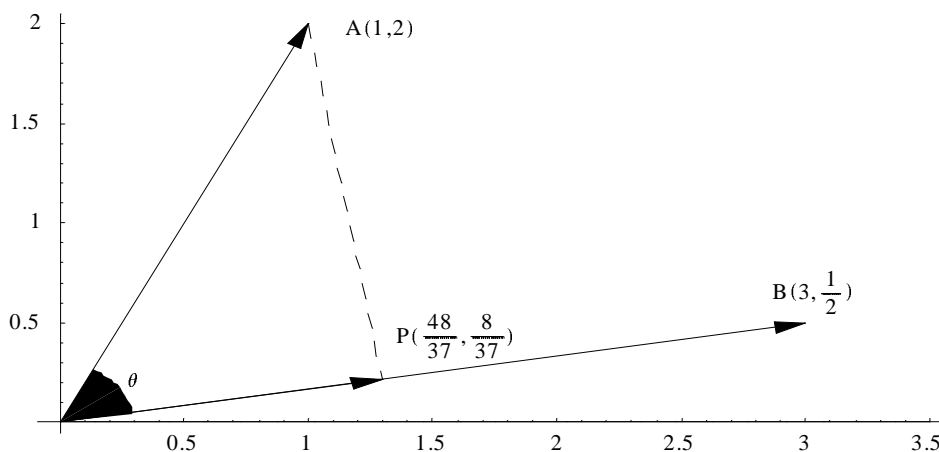
$$c = \frac{A \cdot B}{B \cdot B} = \frac{1 \cdot 3 + 2 \cdot (1/2)}{3 \cdot 3 + (1/2) \cdot (1/2)} = \frac{16}{37}$$

ενώ η προβολή του A πάνω στο B είναι το διάνυσμα $cB = \left(\frac{48}{37}, \frac{8}{37}\right)$. Στο Σχήμα 1.10 φαίνεται η γεωμετρική ερμηνεία της προβολής του διανύσματος A πάνω στο B . Το διάνυσμα cB προκύπτει αν φέρουμε κάθετη από το A στο ευθύγραμμο τμήμα OB .

Ειδικά για τα διανύσματα του επιπέδου, αν θ είναι η γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα A και B , είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι ισχύει:

$$A \cdot B = |A| \cdot |B| \cos \theta.$$

Η σχέση αυτή χρησιμοποιείται ορισμένες φορές στη βιβλιογραφία για να ορίσει το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων. Έχει όμως το μειονέκτημα της ασάφειας που υπάρχει σχετικά με την γεωμετρική έννοια της γωνίας σε χώρους με περισσότερες των 2 ή 3 διαστάσεων.



Σχήμα 1.10: Προβολή του διανύσματος A πάνω στο B

Ιδιότητες μέτρου διανύσματος:

- (α) Ισχύει $|xA| = |x| \cdot |A|$ όπου $x \in \mathbb{R}$.
- (β) Αν $E_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ είναι το i -στό μοναδιαίο διάνυσμα του \mathbb{R}^n , και $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ένα οποιοδήποτε διάνυσμα στον ίδιο χώρο, τότε ισχύει $A \cdot E_i = a_i$, δηλαδή οι συντεταγμένες του διανύσματος είναι οι συνιστώσες του κατά μήκος των μοναδιαίων διανυσμάτων που βρίσκονται πάνω στους άξονες του n -χώρου. Ακόμη ισχύει $|a_i| = \sqrt{a_i^2} \leq \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2} = |A|$.
- (γ) **(ανισότητα Schwarz)** Αν $A, B \in \mathbb{R}^n$ τότε $|A \cdot B| \leq |A||B|$.

$$(\delta) \quad \text{Αν } A, B \in R^n \text{ τότε } -1 \leq \frac{A \cdot B}{|A||B|} \leq 1.$$

$$(\varepsilon) \quad (\text{τριγωνική ανισότητα}) \text{ Αν } A, B \in R^n \text{ τότε } |A + B| \leq |A| + |B|$$

Τα μοναδιαία διανύσματα E_i που αναφέραμε στην ιδιότητα (β) μας παρέχουν έναν εναλλακτικό τρόπο παράστασης των διανυσμάτων που σε ορισμένες περιπτώσεις είναι ιδιαίτερα χρήσιμος. Ένα διάνυσμα $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ (ή διάνυσμα θέσης του σημείου A) μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$$A = a_1 E_1 + \dots + a_n E_n$$

Συχνά, στις εφαρμογές που θα συναντήσουμε στη συνέχεια, συμβολίζουμε το διάνυσμα θέσης κάποιου σημείου A με ένα μικρό γράμμα (π.χ. \vec{a}). Στις περιπτώσεις αυτές, τα μοναδιαία διανύσματα συμβολίζονται \vec{e}_i και το διάνυσμα \vec{a}

$$\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + \dots + a_n \vec{e}_n.$$

Ειδικότερα, για τους Ευκλείδειους χώρους R^2 και του R^3 με τους οποίους θα ασχοληθούμε αναλυτικά στις περισσότερες των περιπτώσεων, συμβολίζουμε τα μοναδιαία διανύσματα των αξόνων με \vec{x}_0 , \vec{y}_0 και \vec{z}_0 ενώ το διάνυσμα θέσης του σημείου $P(x, y, z)$ με

$$\vec{r} = x\vec{x}_0 + y\vec{y}_0 + z\vec{z}_0.$$

Από την ιδιότητα (γ) προκύπτει ότι πάντοτε υπάρχει μία γωνία $\theta \in [0, \pi]$ τέτοια ώστε

$$\cos \theta = \frac{A \cdot B}{|A||B|}.$$

Η σχέση αυτή ορίζει και την γωνία μεταξύ των διανυσμάτων A και B .

Μετά το εσωτερικό γινόμενο που ορίσαμε στη γενική περίπτωση των διανυσμάτων στον R^n , θα ορίσουμε τώρα το εξωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων στον R^3 και θα δώσουμε τη γεωμετρική ερμηνεία του. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι δίνονται δύο διανύσματα θέσης

$$\vec{a} = a_1 \vec{x}_0 + a_2 \vec{y}_0 + a_3 \vec{z}_0 \quad \text{και} \quad \vec{b} = b_1 \vec{x}_0 + b_2 \vec{y}_0 + b_3 \vec{z}_0.$$

Σαν **εξωτερικό γινόμενο** (ή **διανυσματικό γινόμενο**) των \vec{a} και \vec{b} ορίζεται το διάνυσμα:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) \vec{x}_0 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \vec{y}_0 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \vec{z}_0.$$

Η παραπάνω σχέση μπορεί να δοθεί σε πιο εύχρηστη μορφή με τη βοήθεια των οριζουσών:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{x}_0 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \vec{y}_0 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{z}_0 = \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Βεβαίως, η τελευταία ορίζουσα αποτελεί μία απλή μνημονική παράσταση, αφού από τον ορισμό τους οι πίνακες είναι διατάξεις πραγματικών αριθμών.

Στο σημείο αυτό πρέπει να τονίσουμε τη διαφορά ανάμεσα στο εσωτερικό γινόμενο που είναι πραγματικός αριθμός και στο εξωτερικό γινόμενο που είναι διάνυσμα.

Ιδιότητες:

- (α) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}, \quad \vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$
- (β) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{c})$ και $(\vec{b} + \vec{c}) \times \vec{a} = (\vec{b} \times \vec{a}) + (\vec{c} \times \vec{a})$
- (γ) Αν $u \in R$, $(u\vec{a}) \times \vec{b} = u(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times (u\vec{b})$
- (δ) $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a}$
- (ε) $(\vec{a} \times \vec{b})(\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{a} \cdot \vec{a})(\vec{b} \cdot \vec{b}) - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$
- (ζ) $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}||\sin \theta|$ όπου θ η γωνία ανάμεσα στα δύο διανύσματα. Από την ιδιότητα αυτή προκύπτει ότι τα διανύσματα $\vec{a} \neq \vec{0}$ και $\vec{b} \neq \vec{0}$ είναι συγγραμμικά (παράλληλα) αν και μόνο αν το εξωτερικό τους γινόμενο είναι το μηδενικό διάνυσμα.
- (η) Το διάνυσμα $\vec{a} \times \vec{b}$ είναι ορθογώνιο προς κάθε διάνυσμα του επιπέδου που παράγουν τα \vec{a} και \vec{b} .
- (θ) Το μήκος του $\vec{a} \times \vec{b}$ ισούται με το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που έχει σαν πλευρές τα διανύσματα \vec{a} και \vec{b} .
- (ι) Για τα μοναδιαία διανύσματα των αξόνων, \vec{x}_0 , \vec{y}_0 και \vec{z}_0 ισχύει:

$$\vec{x}_0 \times \vec{y}_0 = \vec{z}_0, \quad \vec{y}_0 \times \vec{z}_0 = \vec{x}_0, \quad \vec{z}_0 \times \vec{x}_0 = \vec{y}_0$$
- (κ) Αν δοθούν τρία διανύσματα

$$\vec{a} = a_1 \vec{x}_0 + a_2 \vec{y}_0 + a_3 \vec{z}_0, \quad \vec{b} = b_1 \vec{x}_0 + b_2 \vec{y}_0 + b_3 \vec{z}_0 \quad \text{και} \quad \vec{c} = c_1 \vec{x}_0 + c_2 \vec{y}_0 + c_3 \vec{z}_0$$
 τότε ορίζεται το **τριπλό (ή μικτό) γινόμενό τους**:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Το τριπλό γινόμενο των διανυσμάτων \vec{a} , \vec{b} και \vec{c} (με αυτή τη σειρά) είναι πραγματικός αριθμός του οποίου η απόλυτη τιμή (δηλαδή η απόλυτη τιμή της ορίζουσας των συντεταγμένων) παριστά τον όγκο του παραλληλεπιπέδου με πλευρές τα \vec{a} , \vec{b} και \vec{c} .

§1.3. Γραμμές και επίπεδα

Αν δίνεται ένα σημείο $P = (p_1, \dots, p_n)$ και ένα διάνυσμα $A = (a_1, \dots, a_n)$, τότε ορίζουμε σαν **ευθεία γραμμή** που περνά από το P με διεύθυνση αυτή του διανύσματος A , το σύνολο των σημείων $X = (x_1, \dots, x_n)$ για τα οποία ισχύει:

$$X = P + tA, \quad \text{δηλαδή} \quad x_i = p_i + ta_i, \quad i = 1, \dots, n$$

όπου το t διατρέχει όλους τους πραγματικούς αριθμούς (η ίδια σχέση μπορεί να γραφεί και με τα διανύσματα θέσης των σημείων P , A και X σαν $\vec{x} = \vec{p} + t\vec{a}$). Οι παραπάνω σχέση ονομάζεται **παραμετρική εξίσωση της ευθείας** αφού εξαρτάται από την παράμετρο t .

Στο επίπεδο οι συντεταγμένες του X παριστάνονται με (x, y) . Αν $P = (p, q)$ και $A = (a, b)$, τότε σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό της ευθείας γραμμής, οι συντεταγμένες των σημείων της ευθείας είναι

$$x = p + ta \quad \text{και} \quad y = q + tb.$$

Απαλείφοντας από τις δύο αυτές εξισώσεις την παράμετρο t , αφού τα a και b δεν είναι ταυτόχρονα μηδέν, θα καταλήξουμε σε μία εξίσωση της μορφής

$$cx + dy = e$$

η οποία είναι και η γνωστή εξίσωση ευθείας στο επίπεδο. Μπορούμε να ακολουθήσουμε και την αντίστροφη διαδικασία. Αν δίνεται δηλαδή η $cx + dy = e$ και $c \neq 0$, μπορούμε να θέσουμε $y = t$ και να λύσουμε ως προς x , $x = \frac{e}{c} - \frac{d}{c}t$ παίρνοντας με αυτόν τον τρόπο τις παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας.

Παράδειγμα 1.4

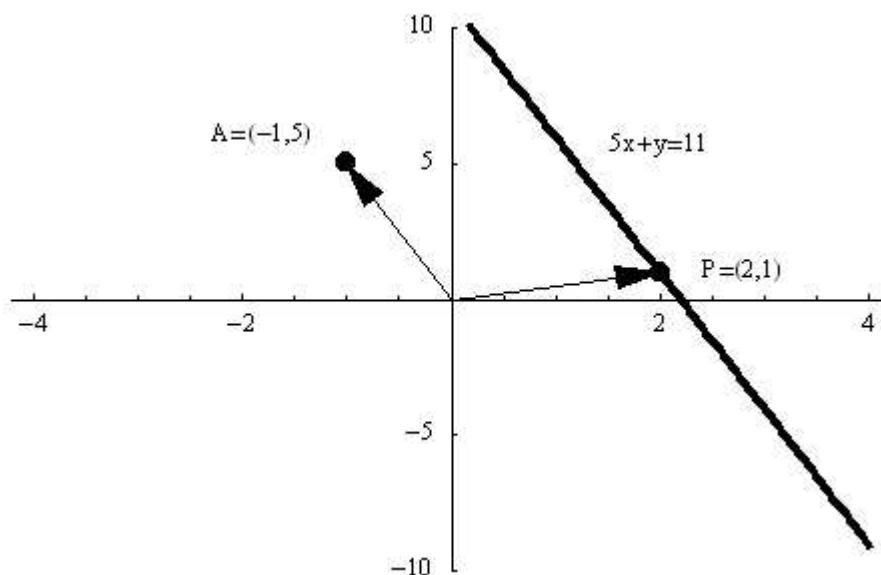
Αν θέλουμε να βρούμε την ευθεία που περνά από το σημείο $P = (2,1)$ και έχει τη διεύθυνση του $A = (-1,5)$ οι παραμετρικές εξισώσεις θα είναι

$$x = 2 - t \quad \text{και} \quad y = 1 + 5t.$$

Αν πολλαπλασιάσουμε την πρώτη εξίσωση με 5 και την προσθέσουμε στην δεύτερη θα έχουμε

$$5x + y = 11.$$

Την ευθεία αυτή μαζί με τα διανύσματα θέσης που δίνονται, μπορούμε να τα δούμε στο Σχήμα 1.11.



Σχήμα 1.11: Ευθεία που περνά από σημείο στη διεύθυνση διανύματος

Η διαδικασία απαλοιφής της παραμέτρου t δε μπορεί να γίνει σε χώρους περισσότερων διαστάσεων. Στις περιπτώσεις αυτές η παραμετρική εξίσωση είναι ο μόνος τρόπος για να περιγράψει κανείς μία ευθεία.

Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι αν δίνονται δύο διαφορετικά σημεία P και Q , τότε η παραμετρική εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία αυτά είναι:

$$X = P + t(Q - P)$$

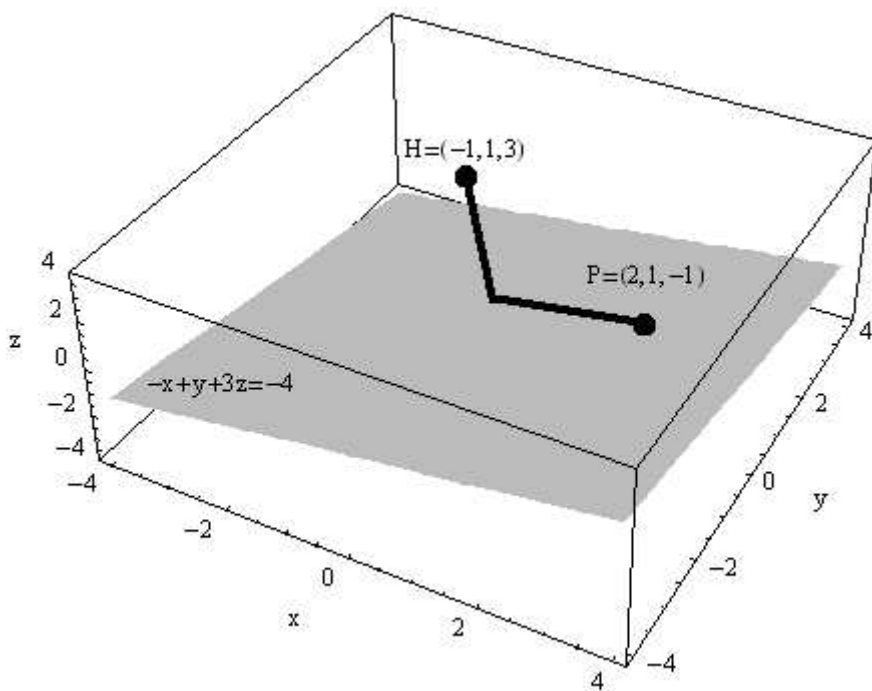
Αν $P = (p_1, \dots, p_n)$ ένα σημείο και $H = (h_1, \dots, h_n)$ ένα διάνυσμα θέσης στον R^n , ορίζουμε σαν **υπερεπίπεδο** που περνά από το P και είναι κάθετο στο H , το σύνολο των σημείων $X = (x_1, \dots, x_n)$ που ικανοποιεί τη σχέση

$$X \cdot H = P \cdot H, \quad \text{δηλαδή} \quad \sum_{i=1}^n x_i h_i = \sum_{i=1}^n p_i h_i.$$

Στην περίπτωση του R^3 , έχουμε τη γνωστή έννοια του **επιπέδου** στον Ευκλείδειο 3-χώρο με γενική μορφή που καθορίζεται από τη **γραμμική εξίσωση**

$$ax + by + cz = d.$$

Ένα κάθετο διάνυσμα στο επίπεδο που δίνεται με τη μορφή αυτή είναι το (a, b, c) το οποίο ονομάζεται και **κανονικό διάνυσμα του επιπέδου**, ενώ για να βρούμε ένα σημείο απ' όπου περνάει δίνουμε αυθαίρετα τιμές σε δύο από τις συντεταγμένες (π.χ. στο x και στο y) και στη συνέχεια λύνουμε για την τρίτη (για το z).



Σχήμα 1.12: Επίπεδο που περνά από σημείο και είναι κάθετο σε διάνυσμα

Παράδειγμα 1.5

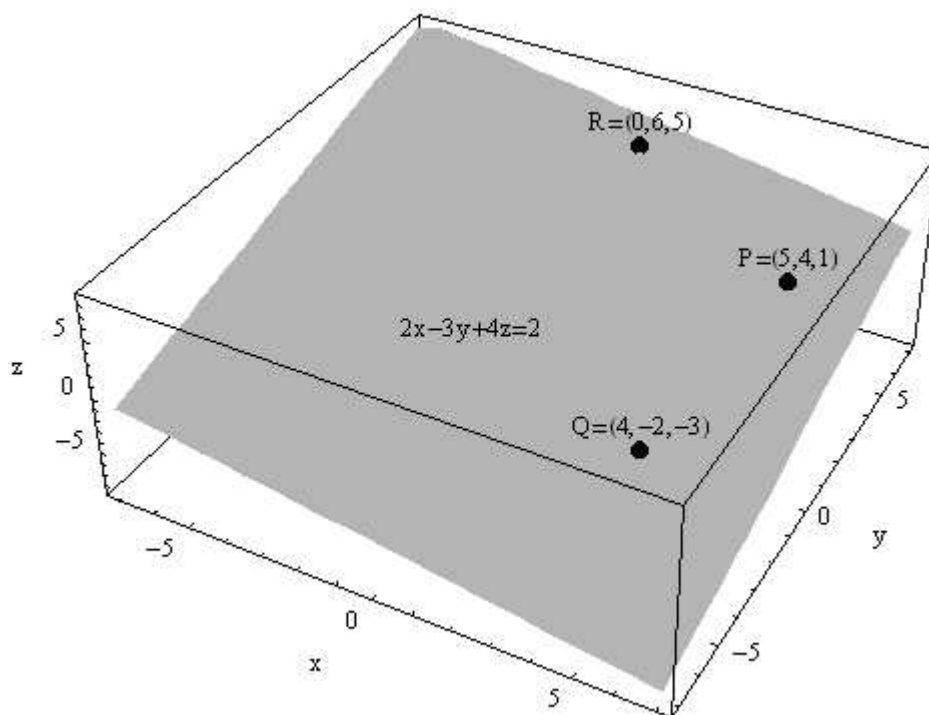
Αν $P = (2, 1, -1)$ και $H = (-1, 1, 3)$ τότε η εξίσωση του επιπέδου που περνά από το P και είναι κάθετο στο H είναι:

$$-x + y + 3z = -2 + 1 - 3$$

ή

$$-x + y + 3z = -4$$

Το επίπεδο μαζί με τα σημεία που το ορίζουν φαίνονται στο Σχήμα 1.12



Σχήμα 1.13: Επίπεδο που περνά από 3 σημεία

Παράδειγμα 1.6

Δίνονται τα σημεία $P = (5, 4, 1)$, $Q = (4, -2, -3)$ και $R = (0, 6, 5)$. Θα βρούμε τη εξίσωση του επιπέδου που περνά από τα σημεία αυτά. Όπως αναφέραμε προηγουμένως, κάθε επίπεδο στο χώρο προσδιορίζεται από εξίσωση της μορφής $ax + by + cz = d$. Στην εξίσωση αυτή αντικαθιστούμε τις συντεταγμένες των σημείων και παίρνουμε:

$$5a + 4b + c - d = 0$$

$$4a - 2b - 3c - d = 0$$

$$6b + 5c - d = 0$$

Υπάρχουν 3 εξισώσεις και 4 άγνωστοι. Λύνοντας το σύστημα ως προς a, b, d διατηρώντας σταθερό το c , βρίσκουμε :

$$a = \frac{1}{2}c, \quad b = -\frac{3}{4}c, \quad d = \frac{1}{2}c$$

Δίνοντας μία αυθαίρετη τιμή στο c , για παράδειγμα $c=4$, παίρνουμε την εξίσωση του επιπέδου:

$$2x - 3y + 4z = 2$$

Το επίπεδο αυτό μαζί με τα τρία σημεία από τα οποία περνά, φαίνονται στο Σχήμα 1.13.

Δύο **διανύσματα** θέσης A και B ονομάζονται **παράλληλα** αν υπάρχει ένας αριθμός $c \neq 0$ τέτοιος ώστε $cA = B$. Δύο **ευθείες** ονομάζονται **παράλληλες** αν για δύο σημεία P_1 και Q_1 που βρίσκονται πάνω στην πρώτη και δύο σημεία P_2 και Q_2 πάνω στη δεύτερη, ισχύει:

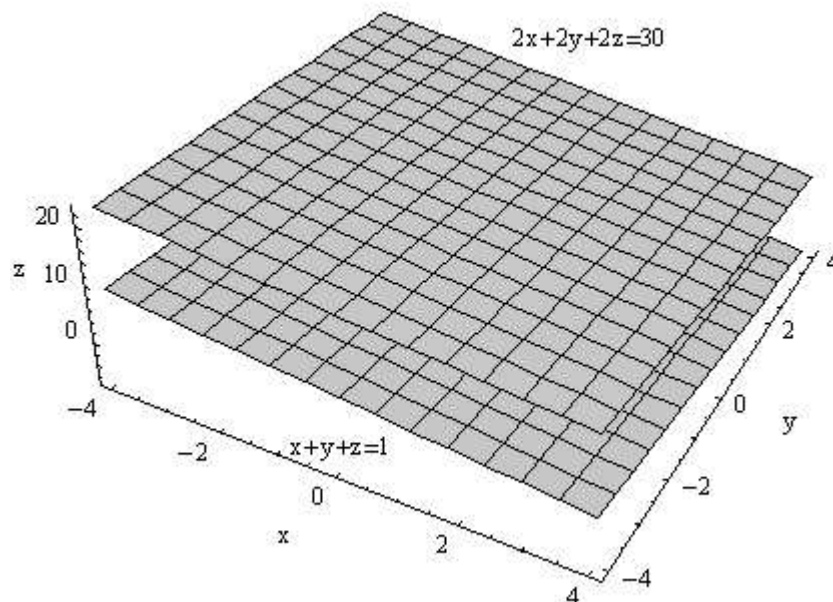
$$P_1 - Q_1 = c(P_2 - Q_2), \quad c \neq 0.$$

Δύο **επίπεδα** ονομάζονται **παράλληλα** αν τα κανονικά τους διανύσματα είναι μεταξύ τους παράλληλα. Στον Ευκλείδειο 3-χώρο, τα επίπεδα με εξισώσεις

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \quad \text{και} \quad a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$

είναι παράλληλα αν και μόνο αν υπάρχει πραγματικός αριθμός $k \neq 0$ τέτοιος ώστε

$$a_1 = ka_2, \quad b_1 = kb_2, \quad c_1 = kc_2.$$



Σχήμα 1.14: Παράλληλα επίπεδα στον 3-χώρο

Παράδειγμα 1.7

Τα επίπεδα $x + y + z = 1$ και $2x + 2y + 2z = 30$ είναι παράλληλα αφού τα κανονικά τους διανύσματα $(1, 1, 1)$ και $(2, 2, 2) = 2(1, 1, 1)$ είναι παράλληλα. Στο Σχήμα 1.14 φαίνονται τα παράλληλα επίπεδα.

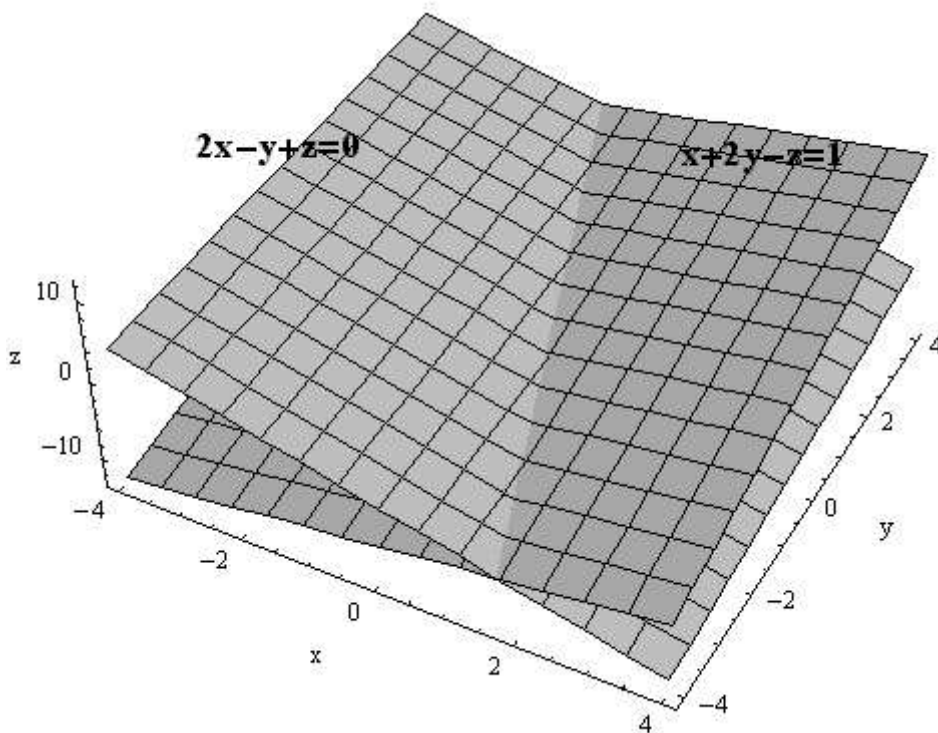
Δύο επίπεδα λέγονται **κάθετα** αν τα κανονικά τους διανύσματα είναι κάθετα μεταξύ τους. Στον Ευκλείδειο 3-χώρο, τα επίπεδα με εξισώσεις

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \quad \text{και} \quad a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$

είναι κάθετα αν

$$(a_1, b_1, c_1) \cdot (a_2, b_2, c_2) = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0.$$

Γενικότερα, μπορούμε να ορίσουμε τη **γωνία** ανάμεσα σε δύο επίπεδα, σαν τη γωνία ανάμεσα στα κανονικά τους διανύσματα.



Σχήμα 1.15: Επίπεδα που τέμνονται

Παράδειγμα 1.8

Στο Σχήμα 1.15 φαίνονται στην ίδια γραφική παράσταση τα επίπεδα με εξισώσεις

$$2x - y + z = 0 \quad \text{και} \quad x + 2y - z = 1.$$

Για να βρούμε τη γωνία των δύο επιπέδων, θεωρούμε τα δύο κανονικά τους διανύσματα, δηλαδή τα διανύσματα

$$A = (2, -1, 1) \quad \text{και} \quad B = (1, 2, -1).$$

Το συνημίτονο της γωνίας που σχηματίζουν είναι:

$$\cos \theta = \frac{A \cdot B}{|A||B|} = -\frac{1}{6}$$

Είναι γνωστό ότι δύο επίπεδα τέμνονται σε μία ευθεία γραμμή. Επομένως στον 3-χώρο υπάρχουν δύο τρόποι – εκφράσεις για να περιγράψουμε μία ευθεία. Ο πρώτος, που ήδη αναφέρθηκε, είναι η παραμετρικές εξισώσεις και ο δεύτερος είναι οι εξισώσεις των επιπέδων που περνούν από την ευθεία. Ένας εναλλακτικός ορισμός της ευθείας λοιπόν είναι: Το σύνολο των σημείων (x, y, z) που ικανοποιούν ταυτόχρονα και τις δύο εξισώσεις των επιπέδων. Μπορούμε πάντοτε με απλές αλγεβρικές πράξεις να βρούμε την μία έκφραση από την άλλη.

Παράδειγμα 1.9

Η ευθεία που ορίζεται σαν τομή των επιπέδων

$$2x - y + z = 0 \quad \text{και} \quad x + 2y - z = 1$$

μπορεί να εκφραστεί και παραμετρικά

$$x = t, \quad y = 1 - 3t, \quad z = 1 - 5t.$$

Αντίστροφα, αν δίνεται η παραμετρική έκφραση της ευθείας, μπορούμε να βρούμε πάντοτε δύο από τα άπειρα επίπεδα των οποίων τομή να είναι η συγκεκριμένη ευθεία. Στο ίδιο παράδειγμα, αν λύσουμε και τις τρεις εξισώσεις ως προς την παράμετρο t , θα έχουμε:

$$t = x, \quad t = \frac{1-y}{3}, \quad t = \frac{1-z}{5}$$

ή απαλείφοντας το t ,

$$x = \frac{1-y}{3} = \frac{1-z}{5}$$

Παίρνοντας το πρώτο με το δεύτερο μέλος και το πρώτο με το τρίτο, έχουμε μία έκφραση της ευθείας σαν τομή των επιπέδων

$$3x + y = 1 \quad \text{και} \quad 5x + z = 1.$$

Εναλλακτικά, αν εφαρμόσουμε τις ιδιότητες των αναλογιών παίρνουμε

$$\frac{x+1-y}{1+3} = \frac{1-z}{5} \quad \text{και} \quad x = \frac{1-y+1-z}{3+5}$$

από τις οποίες τελικά προκύπτει η ευθεία σαν τομή των επιπέδων

$$5x - 5y + 4z = -1 \quad \text{και} \quad 8x + y + z = 2.$$

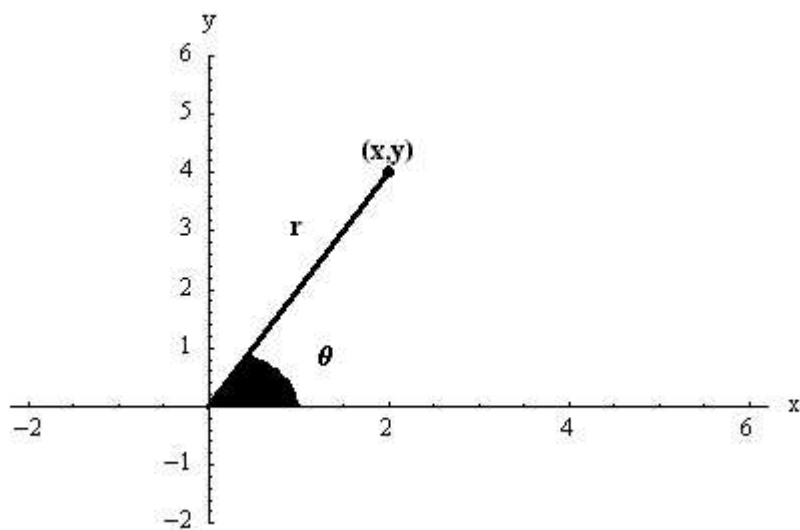
§1.4. Κυλινδρικές και σφαιρικές συντεταγμένες

Είναι γνωστός ο τρόπος παράστασης ενός σημείου στον R^2 με τις **πολικές συντεταγμένες** (r, θ) οι οποίες συνδέονται με τις Καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y) μέσα από τις εξισώσεις:

$$x = r \cos \theta \quad \text{και} \quad y = r \sin \theta$$

όπου $r \geq 0$ και $0 \leq \theta < 2\pi$ (Σχήμα 1.16).

Θα αναφέρουμε τώρα δύο εναλλακτικούς τρόπους παράστασης σημείων στον Ευκλείδειο 3-χώρο που είναι ιδιαίτερα χρήσιμοι στην επίλυση προβλημάτων με πολλαπλά ολοκληρώματα. Πράγματι, όπως θα δούμε αργότερα, σε ορισμένες περιπτώσεις η αλλαγή συστήματος συντεταγμένων απλοποιεί τους υπολογισμούς των ολοκληρωμάτων όσο περίπλοκοι και αν φαίνονται αυτοί αρχικά.



Σχήμα 1.16: Καρτεσιανές και πολικές συντεταγμένες στο επίπεδο

Οι κυλινδρικές συντεταγμένες (r, θ, z) ενός σημείου (x, y, z) ορίζονται από τις σχέσεις:

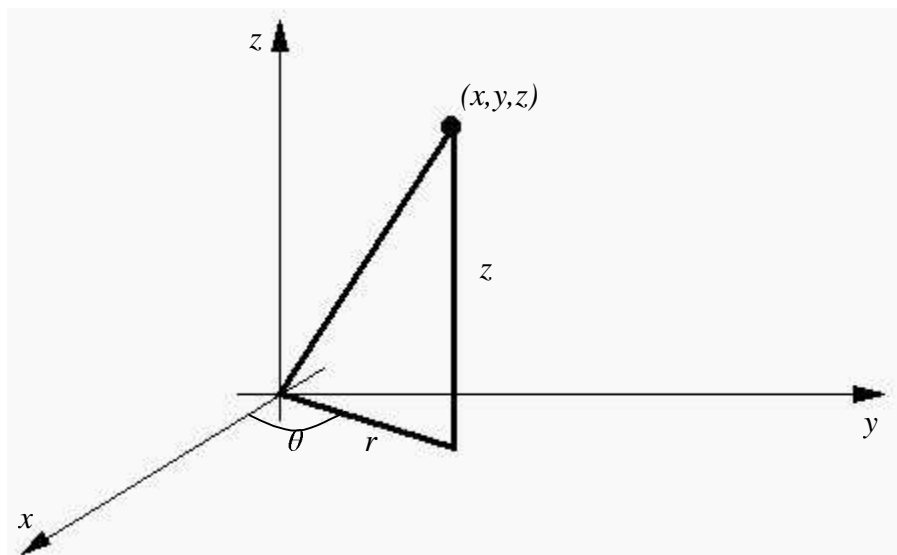
$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z$$

ή ισοδύναμα από τις σχέσεις:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z = z, \quad \theta = \begin{cases} \tan^{-1}(y/x) & \text{αν } x > 0 \text{ και } y \geq 0 \\ \pi + \tan^{-1}(y/x) & \text{αν } x < 0 \\ 2\pi + \tan^{-1}(y/x) & \text{αν } x > 0 \text{ και } y < 0 \\ \pi/2 & \text{αν } x = 0 \text{ και } y > 0 \\ 3\pi/2 & \text{αν } x = 0 \text{ και } y < 0 \end{cases}$$

όπου η συνάρτηση $\tan^{-1}(y/x)$ (συμβολίζεται και με τοξεφ(y/x)) παίρνει τιμές ανάμεσα στα $-\pi/2$ και $\pi/2$. Στην περίπτωση των σημείων με $x = y = 0$ δεν ορίζεται το θ .

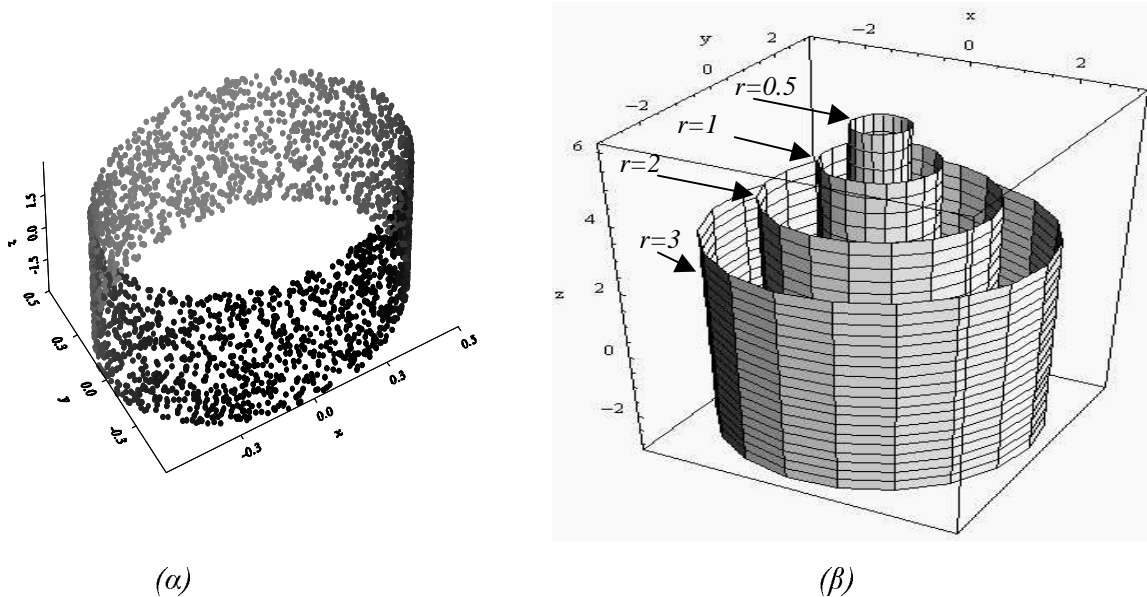
Μπορούμε να πούμε δηλαδή ότι για κάθε σημείο (x, y, z) γίνεται μετατροπή των δύο πρώτων συντεταγμένων σε πολικές ενώ η τρίτη παραμένει αμετάβλητη. Κάθε σημείο στον 3-χώρο καθορίζεται μονοσήμαντα από τις κυλινδρικές του συντεταγμένες, αν περιορίσουμε βέβαια τη γωνία θ στο διάστημα $[0, 2\pi)$ (ή σε άλλες περιπτώσεις στο $(-\pi, \pi]$) και το r μόνο στους θετικούς αριθμούς (Σχήμα 1.17).



Σχήμα 1.17: Καρτεσιανές και κυλινδρικές συντεταγμένες

Ο όρος «κυλινδρικές συντεταγμένες» προκύπτει από την εξής ιδιότητα: Όταν $0 \leq \theta \leq 2\pi$ και $-\infty < z < \infty$, ο γεωμετρικός τόπος των σημείων με $r = a$, όπου a θετική

σταθερά, είναι ένας κύλινδρος με ακτίνα a (Σχήμα 1.18). Οι κυλινδρικές συντεταγμένες χρησιμοποιούνται σε περιπτώσεις όπου υπάρχει «κυλινδρική συμμετρία» δηλαδή συμμετρία ως προς μία ευθεία.



Σχήμα 1.18: Γεωμετρικός τόπος σημείων με $r = a$

(α) 3000 σημεία στο χώρο που δημιουργήθηκαν παίρνοντας τυχαία ζεύγη τιμών για το θ στο διάστημα $[0, 2\pi]$ και για το z στο διάστημα $[-3, 3]$. Το r διατηρήθηκε σταθερό $r=0.5$. Για τα σημεία αυτά υπολογίστηκαν οι Καρτεσιανές τους συντεταγμένες (x, y, z) . Φαίνονται να κατανέμονται ομοιόμορφα πάνω σε μία κυλινδρική επιφάνεια.

(β) Κυλινδρικές επιφάνειες που αντιστοιχούν σε σταθερές τιμές του $r=0.5, 1, 2$ και 3 .

Παράδειγμα 1.10

Αν υποθέσουμε ότι έχουμε ένα σημείο με Καρτεσιανές συντεταγμένες $(6, 6, 8)$. Τότε:

$$r = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2}, \quad \theta = \tan^{-1}(6/6) = \tan^{-1}(1) = \pi/4, \quad z = 8.$$

Οι κυλινδρικές συντεταγμένες του σημείου είναι: $(6\sqrt{2}, \pi/4, 8)$.

Αν οι κυλινδρικές συντεταγμένες ενός άλλου σημείου είναι $(8, 2\pi/3, -3)$ μπορούμε αμέσως να υπολογίσουμε τις Καρτεσιανές. Έχουμε:

$$x = r \cos \theta = 8 \cos \frac{2\pi}{3} = 8 \left(-\frac{1}{2} \right) = -4$$

$$y = r \sin \theta = 8 \sin \frac{2\pi}{3} = 8 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 4\sqrt{3}$$

$$z = -3$$

και επομένως οι Καρτεσιανές συντεταγμένες του σημείου είναι $(-4, 4\sqrt{3}, -3)$.

Οι **σφαιρικές συντεταγμένες** (ρ, θ, ϕ) ενός σημείου (x, y, z) ορίζονται από τις σχέσεις:

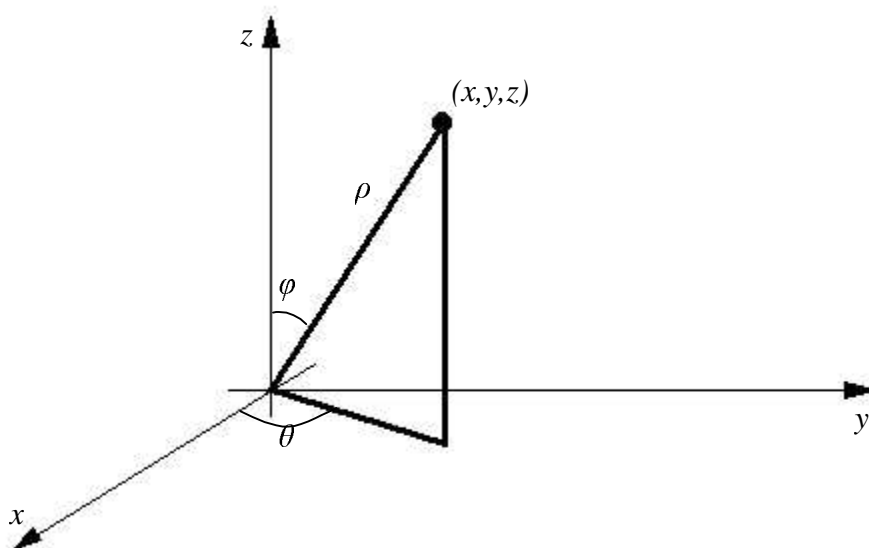
$$x = \rho \sin \phi \cos \theta, \quad y = \rho \sin \phi \sin \theta, \quad z = \rho \cos \phi$$

όπου

$$\rho \geq 0, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad 0 \leq \phi \leq \pi.$$

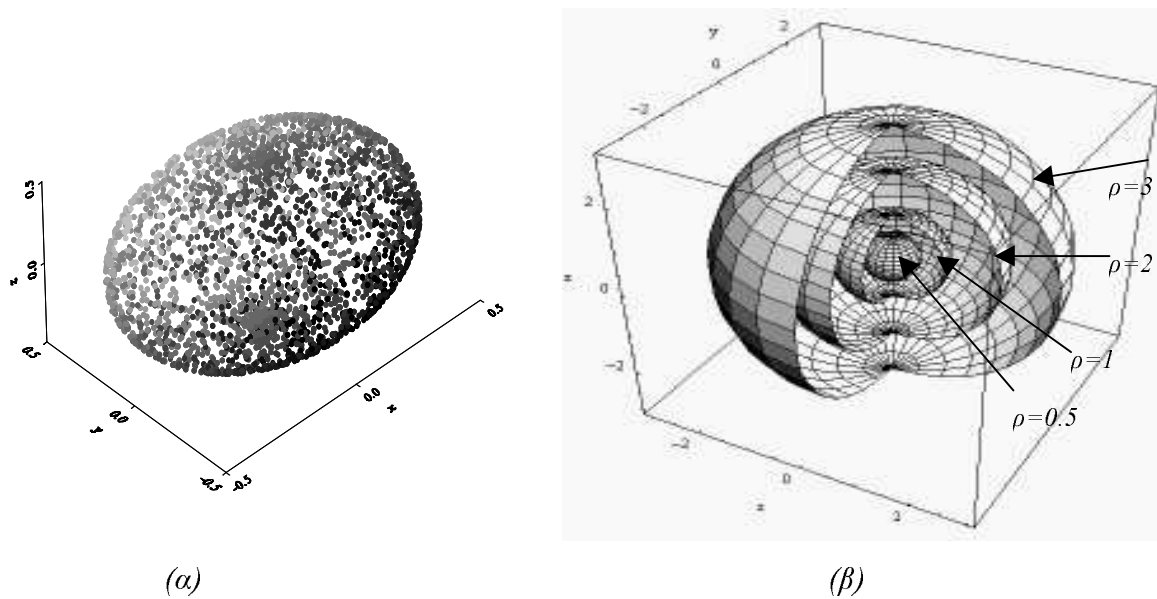
Η γεωμετρική σημασία των σφαιρικών συντεταγμένων είναι:

$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ είναι η απόσταση του σημείου (x, y, z) από την αρχή των αξόνων. Η γωνία θ είναι ίδια με αυτή των κυλινδρικών συντεταγμένων, ενώ η γωνία ϕ σχηματίζεται από το διάνυσμα θέσης του σημείου (x, y, z) και τον άξονα z (Σχήμα 1.19).



Σχήμα 1.19: Καρτεσιανές και σφαιρικές συντεταγμένες

Ο όρος «σφαιρικές συντεταγμένες» προκύπτει από την ιδιότητα: Αν $0 \leq \theta < 2\pi$ και $0 \leq \phi \leq \pi$, τότε ο γεωμετρικός τόπος των σημείων για τα οποία $\rho = a$, όπου a θετική σταθερά, είναι μία σφαίρα με ακτίνα a (Σχήμα 1.20). Οι σφαιρικές συντεταγμένες χρησιμοποιούνται σε προβλήματα όπου υπάρχει «σφαιρική συμμετρία» δηλαδή συμμετρία ως προς ένα σημείο.



Σχήμα 1.20: Γεωμετρικός τόπος σημείων με $\rho = a$

(α) 3000 σημεία στο χώρο που δημιουργήθηκαν παίρνοντας τυχαία ζεύγη τιμών για το θ στο διάστημα $[0, 2\pi)$ και για το ϕ στο διάστημα $[0, \pi]$. Το ρ διατηρήθηκε σταθερό $\rho=0.5$. Για τα σημεία αυτά υπολογίστηκαν οι Καρτεσιανές τους συντεταγμένες (x, y, z) . Φαίνονται να κατανέμονται ομοιόμορφα πάνω σε μία σφαιρική επιφάνεια.

(β) Σφαιρικές επιφάνειες που αντιστοιχούν σε σταθερές τιμές του $\rho=0.5, 1, 2$ και 3 . Εκτός από την περίπτωση $\rho=0.5$, οι υπόλοιπες σφαιρικές επιφάνειες σχεδιάστηκαν με $0 \leq \theta \leq 3\pi/2$.

Παράδειγμα 1.11

Οι Καρτεσιανές συντεταγμένες ενός σημείου είναι $(1, -1, 1)$. Οι σφαιρικές του συντεταγμένες είναι:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{-1}{1}\right) = -\frac{\pi}{4}$$

$$\phi = \cos^{-1}\left(\frac{z}{\rho}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \approx 0.955 \approx 54.75^\circ$$

Για άλλο σημείο του οποίου δίνονται οι σφαιρικές συντεταγμένες $(3, \pi/6, \pi/4)$ έχουμε:

$$x = \rho \sin \phi \cos \theta = 3 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3 \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

$$y = \rho \sin \phi \sin \theta = 3 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3 \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2\sqrt{2}}$$

$$z = \rho \cos \phi = 3 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

Από τα τρία συστήματα παράστασης σημείων στον τρισδιάστατο χώρο, φαίνεται πιο φυσικό και πιο κοντά στην ανθρώπινη διαίσθηση, το σύστημα των Καρτεσιανών συντεταγμένων. Αυτό όμως δε σημαίνει ότι οι άλλοι τρόποι είναι θεωρητικά κατασκευάσματα μόνο για να διευκολύνουν την επίλυση προβλημάτων. Για να γίνει περισσότερο κατανοητή η χρησιμότητα των συστημάτων στην πράξη, θα δώσουμε ένα παράδειγμα από την επιστήμη της ρομποτικής όπου το κάθε σύστημα συντεταγμένων αντιστοιχεί σε ένα σύνολο μηχανικών κινήσεων.

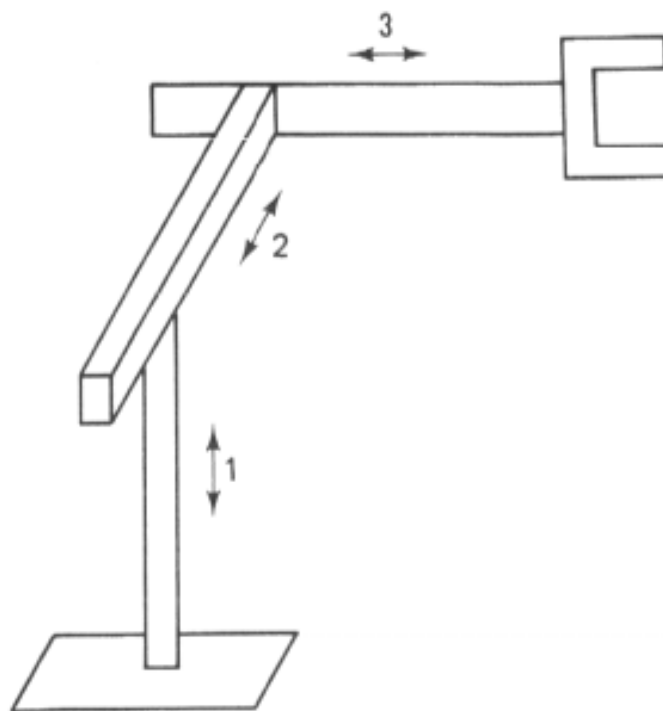
Παράδειγμα 1.12 – Εφαρμογή στη ρομποτική

Παρόλο που η λέξη «ρομπότ» μπορεί να σημαίνει αρκετά διαφορετικά πράγματα, ανάλογα με την περίπτωση που χρησιμοποιείται, εμείς θα θεωρήσουμε σαν *ρομπότ* έναν μηχανικό αυτόματο βραχίονα ο οποίος ελέγχεται με το κατάλληλο λογισμικό για να εκτελεί προγραμματισμένες κινήσεις με σκοπό τον χειρισμό φυσικών αντικειμένων. Τέτοιοι βραχίονες χρησιμοποιούνται στη βιομηχανία και είναι γνωστοί και σαν *βιομηχανικά ρομπότ*.

Τα ρομπότ αυτά μοιάζουν στην κατασκευή με τον ανθρώπινο βραχίονα. Αποτελούνται δηλαδή από *συνδεδετικά τμήματα* που αντιστοιχούν σε μέλη του ανθρώπινου σώματος όπως το στήθος, ο άνω βραχίονας και ο πήχης. Τα τμήματα αυτά συνδέονται μεταξύ τους με *αρθρώσεις* που και αυτές αντιστοιχούν στον ανθρώπινο ώμο, στον αγκώνα και στον καρπό. Στο άκρο του μηχανικού βραχίονα υπάρχει το *κύριο εργαλείο* το οποίο αντιστοιχεί στο ανθρώπινο χέρι.

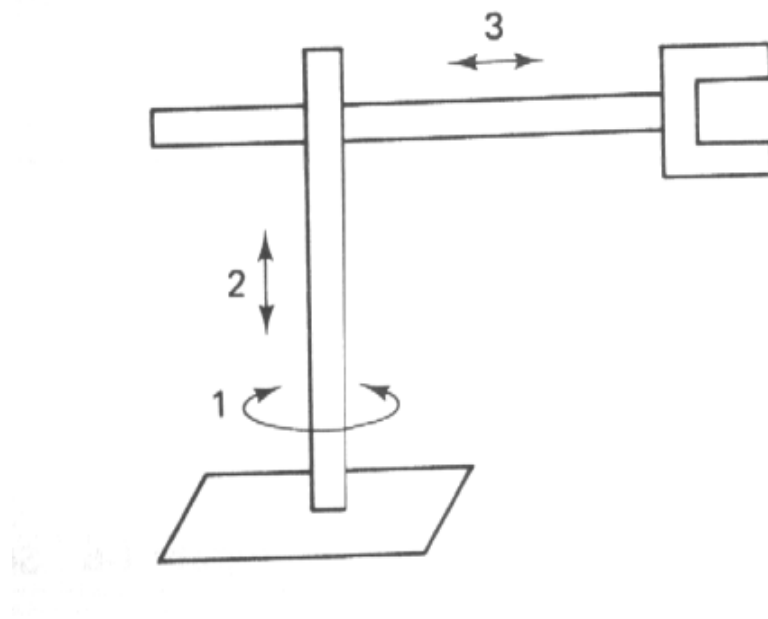
Πολύ σημαντικό στοιχείο για τον χαρακτηρισμό και τον προγραμματισμό ενός τέτοιου μηχανικού βραχίονα είναι η λεγόμενη *γεωμετρία του περιβλήματος εργασίας*, δηλαδή ο γεωμετρικός τόπος των σημείων στον τρισδιάστατο χώρο που μπορεί να φτάσει ο καρπός. Το περίβλημα εργασίας εξαρτάται από την ακολουθία των τριών αρθρώσεων που χρησιμοποιούνται για τη σύνδεση των τμημάτων του βραχίονα. Έχουμε δύο βασικά είδη αρθρώσεων ανάλογα με τις κινήσεις που επιτρέπουν να εκτελεστούν: (α) Η *πρισματική άρθρωση* που επιτρέπει μόνο γραμμικές κινήσεις κατά μήκος ενός άξονα και (β) Η *περιστροφική άρθρωση* που επιτρέπει περιστροφικές κινήσεις γύρω από έναν άξονα. Το είδος λοιπόν των κινήσεων που επιτρέπουν οι αρθρώσεις καθορίζει και το περίβλημα εργασίας.

Το απλούστερο ρομπότ είναι αυτό που όλες οι αρθρώσεις του είναι πρισματικές. Ο καρπός δηλαδή μπορεί να κινηθεί πάνω και κάτω, μέσα και έξω, εμπρός και πίσω. Ένας τέτοιος βραχίονας χαρακτηρίζεται σαν *Καρτεσιανό ρομπότ* ή αλλιώς *ορθογώνιο ρομπότ*. Είναι φανερό ότι το περίβλημα εργασίας είναι ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο (μαζί με το εσωτερικό του). Ένα τέτοιο ρομπότ φαίνεται στο Σχήμα 1.21. Αξίζει να παρατηρήσει κανείς την αντιστοιχία των κινήσεων των τριών αρθρώσεων με τις τιμές που διατρέχουν οι μεταβλητές x, y, z πάνω στους αντίστοιχους άξονες.



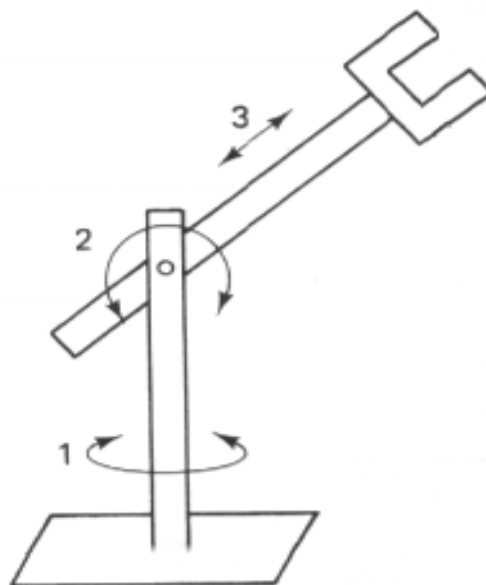
Σχήμα 1.21: Καρτεσιανό ρομπότ

Αν η πρώτη άρθρωση ενός Καρτεσιανού ρομπότ αντικατασταθεί από μία περιστροφική άρθρωση, τότε προκύπτει ένα *κυλινδρικό ρομπότ*. Ένα τέτοιο ρομπότ φαίνεται στο Σχήμα 1.22. Επειδή οι γραμμικές κινήσεις της τρίτης άρθρωσης είναι περιορισμένες ανάμεσα σε μία ελάχιστη και μία μέγιστη απόσταση, το περίβλημα εργασίας είναι τα σημεία ανάμεσα σε δύο ομόκεντρους κυλίνδρους. Και εδώ παρατηρούμε την αντιστοιχία των κινήσεων της πρώτης άρθρωσης με τις τιμές που παίρνει η γωνία θ διατρέχοντας το διάστημα $[0, 2\pi)$ και ακόμη τις κινήσεις της τρίτης άρθρωσης που αντιστοιχούν στην ακτίνα r . Η δεύτερη άρθρωση αντιστοιχεί στις τιμές του z .



Σχήμα 1.22: Κυλινδρικό ρομπότ

Αν η δεύτερη άρθρωση ενός κυλινδρικού ρομπότ αντικατασταθεί από μία περιστροφική άρθρωση, τότε θα έχουμε ένα σφαιρικό ρομπότ (Σχήμα 1.23). Το περίβλημα εργασίας του είναι τα σημεία ανάμεσα σε δύο ομόκεντρες σφαίρες (επειδή και πάλι έχουμε περιορισμό των πρισματικών κινήσεων). Η πρώτη άρθρωση αντιστοιχεί στη γωνία θ , η δεύτερη στη γωνία φ και η τρίτη στην ακτίνα ρ .



Σχήμα 1.23: Σφαιρικό ρομπότ

Είναι εύκολο να καταλάβουμε πως με άλλους συνδυασμούς των πρισματικών και των περιστροφικών αρθρώσεων μπορούμε να πετύχουμε διαφορετικά αποτελέσματα για το περίβλημα εργασίας. Σκοπός μας όμως είναι να γίνει φανερή η αντιστοιχία συστήματος συντεταγμένων – μηχανικών κινήσεων και για αυτό το λόγο περιοριζόμαστε μόνο σε αυτά τα τρία είδη.

Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο 2

Διανυσματικές συναρτήσεις πραγματικής μεταβλητής

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε μία ειδική κατηγορία συναρτήσεων, τις διανυσματικές συναρτήσεις οι οποίες έχουν πεδίο ορισμού κάποιο υποσύνολο του \mathbf{R} και οι τιμές τους είναι σημεία (και επομένως διανύσματα θέσης) του \mathbf{R}^n . Θα δούμε πως οι συναρτήσεις αυτές απεικονίζονται γραφικά με καμπύλες στον τρισδιάστατο χώρο και πως παραγωγίζονται. Θα δείξουμε ακόμη πως μια καμπύλη περιγράφει την τροχιά ενός κινητού σώματος, και με ποιο τρόπο ορίζεται η ταχύτητα και η επιτάχυνση της καμπύλης.

§2.1. Διανυσματικές συναρτήσεις

Αν συμβολίσουμε με $[a,b]$ ένα διάστημα του \mathbf{R} , τότε ονομάζουμε **παραμετρική καμπύλη** ή απλά **καμπύλη στον \mathbf{R}^n** , μία απεικόνιση της μορφής

$$\vec{r} : [a,b] \rightarrow \mathbf{R}^n.$$

Είναι φανερό από τον παραπάνω ορισμό, ότι αν συμβολίσουμε με t μία μεταβλητή που διατρέχει το διάστημα $[a,b]$, τότε η τιμή της συνάρτησης που είναι το **διάνυσμα θέσης** $\vec{r}(t)$, διαγράφει μία καμπύλη στον \mathbf{R}^n . Όταν αναφερόμαστε στον \mathbf{R}^2 ή στον \mathbf{R}^3 , είναι χρήσιμο, να φανταζόμαστε την μεταβλητή t σαν τον χρόνο και το $\vec{r}(t)$ σαν τη θέση ενός κινητού σώματος μέσα στον χώρο κατά τη χρονική στιγμή t . Το διάνυσμα θέσης $\vec{r}(t)$ μπορεί να γραφεί με τη μορφή **συνιστωσών**

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{x}_0 + y(t)\vec{y}_0 + z(t)\vec{z}_0 \quad \text{ή} \quad \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

2. Διανυσματικές συναρτήσεις πραγματικής μεταβλητής

όπου η κάθε συνιστώσα $x(t)$, $y(t)$ και $z(t)$ είναι πραγματική συνάρτηση της μεταβλητής t . Η ίδια παράσταση με συνιστώσες μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για τη γενική περίπτωση της διανυσματικής συνάρτησης στον \mathbf{R}^n οπότε

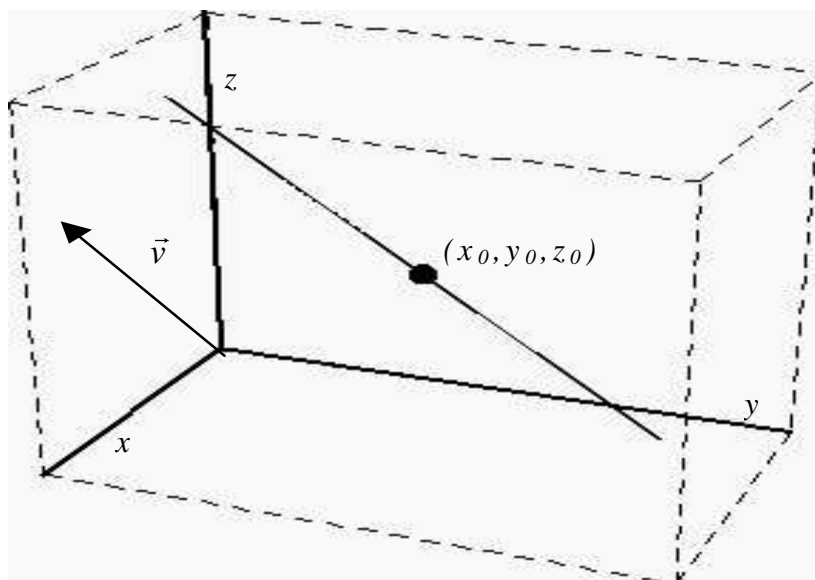
$$\vec{r}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)).$$

Παράδειγμα 2.1

Η ευθεία στον \mathbf{R}^3 που περνάει από το σημείο (x_0, y_0, z_0) και έχει τη διεύθυνση του διανύσματος $\vec{v} = (a, b, c)$, είναι η εικόνα της διανυσματικής συνάρτησης

$$\vec{r}(t) = (x_0, y_0, z_0) + t\vec{v} = (x_0 + ta, y_0 + tb, z_0 + tc)$$

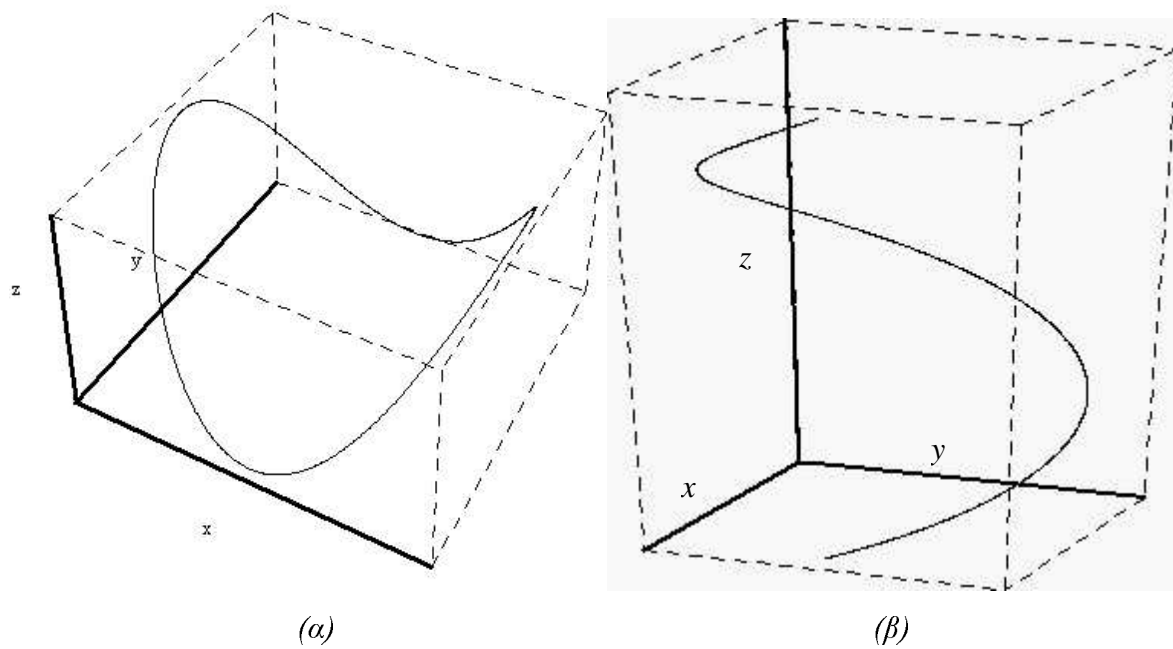
όπου το $t \in \mathbf{R}$ (Σχήμα 2.1)



Σχήμα 2.1: Ευθεία στον χώρο

Παράδειγμα 2.2

Στο Σχήμα 2.2 βλέπουμε δύο διανυσματικές συναρτήσεις των οποίων οι συνιστώσες συναρτήσεις είναι τριγωνομετρικές συναρτήσεις. Συγκεκριμένα, στο (α) βλέπουμε την συνάρτηση $\vec{r}(t) = (\sin t, \cos t, \sin^2 t)$ και στο (β) την $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$. Και οι δύο καμπύλες έχουν σχεδιαστεί θεωρώντας σαν πεδίο ορισμού το διάστημα $[0, 2\pi]$. Η δεύτερη καμπύλη είναι γνωστή και σαν **δεξιόστροφη έλικα**.



Σχήμα 2.2: Καμπύλες στον χώρο

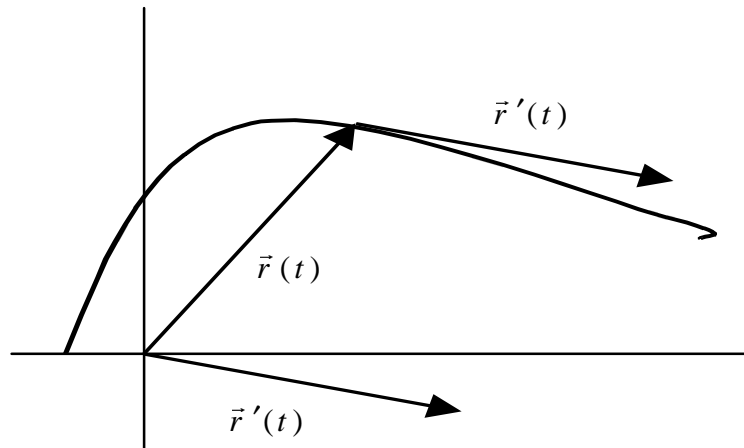
§2.2. Παραγωγή διανυσματικών συναρτήσεων

Μία διανυσματική συνάρτηση ονομάζεται **παραγωγίσιμη** αν κάθε συνιστώσα της είναι μία παραγωγίσιμη συνάρτηση του t . Στην περίπτωση αυτή ορίζουμε σαν **παράγωγο** της καμπύλης $\vec{r}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$, την καμπύλη που αντιστοιχεί στη διανυσματική συνάρτηση

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \left(\frac{dx_1(t)}{dt}, \dots, \frac{dx_n(t)}{dt} \right).$$

Γενικά, την παράγωγο μίας καμπύλης την συμβολίζουμε με $\vec{r}'(t)$ ή ακόμα (σε εφαρμογές στη φυσική κυρίως) με $\dot{\vec{r}}(t)$.

Ορίζουμε σαν **διάνυσμα ταχύτητας** μίας καμπύλης $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ κατά τη χρονική στιγμή t , το διάνυσμα $\vec{r}'(t)$. Η **ταχύτητα** του κινητού τη χρονική στιγμή t είναι το μήκος του διανύσματος ταχύτητας, δηλαδή το $v(t) = |\vec{r}'(t)|$. Βεβαίως, το διάνυσμα ταχύτητας έχει αρχικό σημείο την αρχή των αξόνων, αλλά αν το μετατοπίσουμε παράλληλα έτσι ώστε να έχει αρχικό σημείο το πέρας του $\vec{r}(t)$, θα δούμε ότι εφάπτεται στην καμπύλη στο συγκεκριμένο σημείο (Σχήμα 2.3).



Σχήμα 2.3: Σχέση των διανυσμάτων θέσης και ταχύτητας

Αν $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ μία καμπύλη στον \mathbf{R}^3 , τότε σαν **εφαπτομένη** (ευθεία) της $\vec{r}(t)$ στο σημείο t_0 ορίζεται η ευθεία που περνά από το πέρας του $\vec{r}(t_0)$ και έχει την κατεύθυνση του $\vec{r}'(t_0)$, με την προϋπόθεση $\vec{r}'(t_0) \neq 0$. Στην περίπτωση που ισχύει $\vec{r}'(t_0) = 0$, η εφαπτομένη δεν ορίζεται. Σύμφωνα με όσα αναφέραμε προηγούμενα (Παράδειγμα 2.1), η παραμετρική εξίσωση της εφαπτομένης είναι:

$$\vec{l}(t) = \vec{r}(t_0) + t\vec{r}'(t_0).$$

Παράδειγμα 2.3

Αν $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$, τότε το διάνυσμα ταχύτητας σε κάθε σημείο t είναι

$$\vec{r}'(t) = (-\sin t, \cos t, 1).$$

Η ταχύτητα ενός σημείου είναι

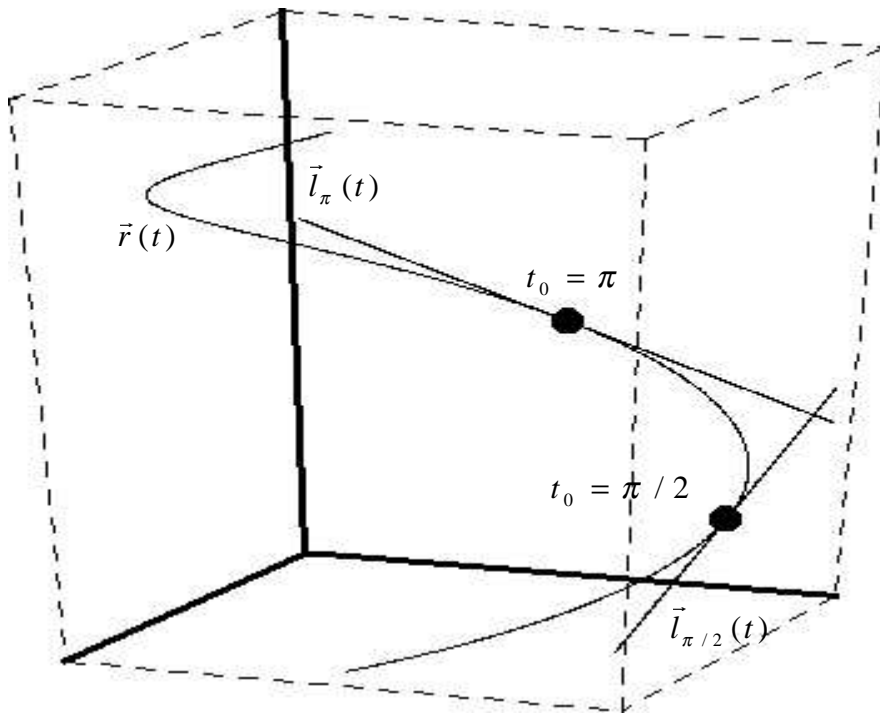
$$v(t) = |\vec{r}'(t)| = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + 1} = \sqrt{2}$$

Αυτό σημαίνει ότι το διάνυσμα ταχύτητας αλλάζει συνεχώς διεύθυνση αλλά η ταχύτητα παραμένει σταθερή σε όλα τα σημεία. Η εφαπτομένη σε ένα τυχαίο σημείο t_0 είναι

$$\vec{l}(t) = (\cos t_0, \sin t_0, t_0) + t(-\sin t_0, \cos t_0, 1) = (\cos t_0 - t \sin t_0, \sin t_0 + t \cos t_0, t_0 + t).$$

Στο Σχήμα 2.4 βλέπουμε κομμάτι της γραφικής παράστασης της δεξιόστροφης έλικας για $t \in [0, 2\pi]$ και τις εφαπτόμενες ευθείες στα σημεία $t_0 = \pi/2$ και $t_0 = \pi$. Οι εξισώσεις τους είναι αντίστοιχα:

$$\vec{l}_{\pi/2}(t) = (-t, 1, \pi/2 + t) \quad \text{και} \quad \vec{l}_{\pi}(t) = (-1, -t, \pi + t).$$



Σχήμα 2.4: Η δεξιόστροφη έλικα και οι εφαπτόμενές της στα σημεία $t_0 = \pi/2$ και $t_0 = \pi$

Ορίζουμε σαν **διάνυσμα επιτάχυνσης** μίας καμπύλης $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ κατά τη χρονική στιγμή t , το διάνυσμα $\vec{r}''(t) = \frac{d\vec{r}'(t)}{dt}$. Η **επιτάχυνση** του κινητού τη χρονική στιγμή t είναι το μήκος του διανύσματος επιτάχυνσης, δηλαδή το $a(t) = |\vec{r}''(t)|$.

Παράδειγμα 2.4

Αν θεωρήσουμε και πάλι την δεξιόστροφη έλικα $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$ βρίσκουμε εύκολα το διάνυσμα επιτάχυνσης κάθε χρονικής στιγμής t :

$$\vec{r}''(t) = (-\cos t, -\sin t, 0).$$

και την επιτάχυνση του κινητού $a(t) = |\vec{r}''(t)| = 1$. Αυτό σημαίνει ότι και η επιτάχυνση είναι σταθερή παρόλο που το διάνυσμα της επιτάχυνσης αλλάζει συνεχώς διεύθυνση (όπως και η ταχύτητα).

Στο σημείο αυτό πρέπει να τονίσουμε ότι η επιτάχυνση $a(t)$ δεν είναι αναγκαστικά η παράγωγος της ταχύτητας $v(t)$. Αυτό φαίνεται και από τα Παραδείγματα 2.3 και 2.4 όπου βρέθηκε $v(t) = \sqrt{2}$ και $a(t) = 1$. Στην πραγματικότητα αυτό φαίνεται σε όλα σχεδόν τα παραδείγματα.

Ιδιότητες παραγωγίσιμης

Οι ιδιότητες που ισχύουν για την παραγωγή των καμπύλων είναι όμοιες με αυτές που γνωρίζουμε για τις πραγματικές συναρτήσεις. Όλες οι ιδιότητες μπορούν να αποδειχτούν με στοιχειώδεις πράξεις αφού εξάλλου η παραγωγή καμπύλης ανάγεται, σύμφωνα με τον ορισμό, σε παραγωγή των συνιστωσών της που είναι πραγματικές συναρτήσεις.

(1) Αν $\vec{r}_1(t)$ και $\vec{r}_2(t)$ είναι δύο παραγωγίσιμες καμπύλες οι οποίες ορίζονται για τις ίδιες τιμές του t , τότε το άθροισμά τους $\vec{r}_1(t) + \vec{r}_2(t)$ είναι παραγωγίσιμη καμπύλη και ισχύει:

$$\frac{d(\vec{r}_1(t) + \vec{r}_2(t))}{dt} = \frac{d\vec{r}_1(t)}{dt} + \frac{d\vec{r}_2(t)}{dt}.$$

(2) Αν $c \in \mathbf{R}$ και $\vec{r}(t)$ μία παραγωγίσιμη καμπύλη, τότε και η $c\vec{r}(t)$ είναι παραγωγίσιμη και ισχύει

$$\frac{d(c\vec{r}(t))}{dt} = c \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$

(3) Αν $f(t)$ παραγωγίσιμη πραγματική συνάρτηση και $\vec{r}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ παραγωγίσιμη καμπύλη, ορισμένες για τις ίδιες τιμές του t , τότε το γινόμενο τους που ορίζεται

$$f(t)\vec{r}(t) = (f(t)x_1(t), \dots, f(t)x_n(t))$$

είναι παραγωγίσιμη καμπύλη και ισχύει

$$\frac{d(f(t)\vec{r}(t))}{dt} = f(t) \frac{d\vec{r}(t)}{dt} + \frac{df(t)}{dt} \vec{r}(t)$$

- (4) Αν $\vec{r}_1(t)$ και $\vec{r}_2(t)$ είναι δύο παραγωγίσιμες καμπύλες οι οποίες ορίζονται για τις ίδιες τιμές του t , τότε το εσωτερικό γινόμενο τους $\vec{r}_1(t) \cdot \vec{r}_2(t)$ είναι παραγωγίσιμη πραγματική συνάρτηση και ισχύει:

$$\frac{d(\vec{r}_1(t) \cdot \vec{r}_2(t))}{dt} = \vec{r}_1'(t) \cdot \vec{r}_2(t) + \vec{r}_1(t) \cdot \vec{r}_2'(t).$$

Ειδικά για τον \mathbf{R}^3 όπου ορίζεται και το εξωτερικό γινόμενο, έχουμε:

$$\frac{d(\vec{r}_1(t) \times \vec{r}_2(t))}{dt} = \vec{r}_1'(t) \times \vec{r}_2(t) + \vec{r}_1(t) \times \vec{r}_2'(t)$$

- (5) **Ο κανόνας της αλυσίδας:** Έστω $\vec{r}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ μία παραγωγίσιμη καμπύλη. Έστω επίσης $f(t)$ μία παραγωγίσιμη πραγματική συνάρτηση, της οποίας οι τιμές περιέχονται στο πεδίο ορισμού της καμπύλης. Τότε μπορούμε να ορίσουμε τη **σύνθετη καμπύλη** $\vec{r} \circ f$ ως εξής: Αν s είναι ένας αριθμός που ανήκει στο πεδίο ορισμού της f , η τιμή της καμπύλης $\vec{r} \circ f$ στο s θα είναι:

$$(\vec{r} \circ f)(s) = \vec{r}(f(s)).$$

Η σύνθετη καμπύλη είναι επίσης παραγωγίσιμη και ισχύει:

$$(\vec{r} \circ f)'(s) = f'(s) \vec{r}'(f(s))$$

Εναλλακτικά, θέτοντας $t = f(s)$ μπορούμε να γράψουμε την παραπάνω σχέση με τη μορφή

$$\frac{d(\vec{r} \circ f)}{ds} = \frac{d\vec{r}}{dt} \frac{dt}{ds}.$$

- (6) Η καμπύλη $\vec{r}(t)$ έχει σταθερό μέτρο, $|\vec{r}(t)| = \text{σταθερό}$, αν και μόνο αν είναι κάθετη στην παράγωγό της, ισχύει δηλαδή $\vec{r}(t) \cdot \vec{r}'(t) = 0$ για όλα τα t όπου ορίζεται.
- (7) Η καμπύλη $\vec{r}(t)$ έχει σταθερή διεύθυνση αν και μόνο αν είναι παράλληλη με την παράγωγό της, αν ισχύει δηλαδή $\vec{r}(t) \times \vec{r}'(t) = \vec{0}$ για όλα τα t όπου ορίζεται.
- (8) Η καμπύλη $\vec{r}(t)$ είναι σταθερή, δηλαδή ταυτίζεται με ένα μόνο σημείο, αν και μόνο αν $\vec{r}'(t) = \vec{0}$ για όλα τα t όπου ορίζεται.

§2.3. Μήκος τόξου καμπύλης

Στην παράγραφο αυτή θα ορίσουμε την έννοια του μήκους τμήματος μίας καμπύλης. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει το μήκος αυτό όταν η καμπύλη παριστά στον \mathbf{R}^3 την τροχιά ενός κινητού σώματος που κινείται με ταχύτητα $v(t) = |\vec{r}'(t)|$. Στην περίπτωση αυτή ουσιαστικά υπολογίζουμε την απόσταση που διένυσε το κινητό από μία χρονική στιγμή $t = a$ έως μία άλλη χρονική στιγμή $t = b$.

Ας θεωρήσουμε λοιπόν μία καμπύλη $\vec{r}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ και ας υποθέσουμε ότι το t διατρέχει ένα διάστημα από a έως b . Ορίζουμε σαν **μήκος (του τόξου) της καμπύλης**

$$s = \int_a^b |\vec{r}'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \dots + \left(\frac{dx_n}{dt}\right)^2} dt$$

Ειδικά για τις περιπτώσεις του \mathbf{R}^2 και του \mathbf{R}^3 που μας ενδιαφέρουν περισσότερο, παραπάνω σχέση έχει τις μορφές αντίστοιχα

$$s = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt \quad \text{και} \quad s = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt$$

Παράδειγμα 2.5

Η καμπύλη $\vec{r}(t) = (a \cos t, a \sin t)$ παριστά κίνηση πάνω σε κύκλο ακτίνας a όσο το t διατρέχει τους πραγματικούς αριθμούς. Αν ζητήσουμε το μήκος του τόξου της καμπύλης για $0 \leq t \leq 2\pi$, θα έχουμε:

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-a \sin t)^2 + (a \cos t)^2} dt = 2\pi a$$

που είναι η περιφέρεια του κύκλου. Αν ζητούσαμε το μήκος του τόξου για $0 \leq t \leq 4\pi$, το αποτέλεσμα θα ήταν $4\pi a$, αφού το κινητό θα διέγραφε δύο φορές τον ίδιο κύκλο.

Παράδειγμα 2.6

Το μήκος της έλικας $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$ στο διάστημα $0 \leq t \leq 2\pi$ θα είναι:

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + 1^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2} dt = 2\sqrt{2}\pi$$

§2.4. Αλλαγή παραμέτρου – τριέδρο του Frenet - καμπυλότητα και στρέψη

Η ιδιότητα (5) της §2.2 έχει μία σημαντική εφαρμογή. Αυτή είναι η **αλλαγή παραμέτρου** μίας καμπύλης. Στην πράξη, στον τρισδιάστατο χώρο η αλλαγή παραμέτρου εφαρμόζεται όταν θέλουμε να περιγράψουμε την τροχιά ενός κινητού σώματος όχι σαν (διανυσματική) συνάρτηση του χρόνου, αλλά σαν συνάρτηση της απόστασης που έχει διανυθεί από κάποιο αρχικό σημείο. Η αλλαγή παραμέτρου απλουστεύει ορισμένες σχέσεις που εμπλέκουν την ταχύτητα και την επιτάχυνση της καμπύλης και κάποιες φορές βοηθά στην κατανόηση της γεωμετρικής ερμηνείας κάποιων ιδιοτήτων.

Στις προηγούμενες παραγράφους εξετάσαμε τις καμπύλες και τις ιδιότητές τους χωρίς να θέσουμε περιορισμούς. Αυτό που υποθέτουμε συνήθως είναι ότι οι καμπύλες που εξετάζουμε είναι **ομαλές** κατά κάποια έννοια. Αυτό σημαίνει ότι είναι παραγωγίσιμες και οι παράγωγοί τους είναι για όλες τις τιμές του t **συνεχείς** (δηλαδή όλες οι συνιστώσες συναρτήσεις τους είναι συνεχείς). Ακόμη, υποθέτουμε ότι ισχύει για την ταχύτητα $v(t) = |\vec{r}'(t)| \neq 0$. Άρα για μία ομαλή καμπύλη ισχύει πάντοτε $v(t) > 0$. Σε ειδικές περιπτώσεις όπου η καμπύλη έχει πεπερασμένο αριθμό σημείων στα οποία η παράγωγος είτε μηδενίζεται, είτε δεν υπάρχει, η καμπύλη **ονομάζεται ομαλή κατά τμήματα**.

Έστω λοιπόν μία ομαλή καμπύλη $\vec{r}(t)$ και a ένα σταθερό σημείο του πεδίου ορισμού. Ορίζουμε σαν **συνάρτηση μήκους τόξου**

$$s(t) = \int_a^t v(u) du ,$$

δηλαδή το μήκος του τόξου από το σημείο a έως ένα μεταβλητό τελικό σημείο.

Τότε όμως θα ισχύει :

$$\frac{ds}{dt} = v(t) > 0$$

για όλες τις τιμές του t και επομένως η συνάρτηση $s(t)$ είναι αυστηρά αύξουσα. Συνεπώς υπάρχει και η αντίστροφη συνάρτηση, έστω

$$t = t(s) .$$

Η αλλαγή παραμέτρου, με νέα παράμετρο το s , γίνεται γράφοντας

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t(s)) = \vec{p}(s) .$$

Παράδειγμα 2.7

Θα εκφράσουμε την καμπύλη

$$\vec{r}(t) = (a \cos t, a \sin t, bt), \quad t \in [0, 2\pi], \quad a, b \in \mathbf{R}$$

σαν συνάρτηση με παράμετρο το μήκος του τόξου s . Η καμπύλη είναι ομαλή διότι η $\vec{r}'(t) = (-a \sin t, a \cos t, b)$ είναι συνεχής και ακόμη ισχύει $\vec{r}'(t) \neq 0 \quad \forall t \in [0, 2\pi]$.

Η συνάρτηση μήκους του τόξου είναι

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{(-a \sin u)^2 + (a \cos u)^2 + b^2} du = \int_0^t \sqrt{a^2 + b^2} du = t \sqrt{a^2 + b^2}$$

Επομένως, η αντίστροφη σχέση θα είναι

$$t(s) = \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Δηλαδή η καμπύλη μπορεί να γραφεί με παράμετρο το s

$$\vec{p}(s) = \left(a \cos \left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), a \sin \left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), \frac{bs}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$$

όπου $s \in [0, 2\pi \sqrt{a^2 + b^2}]$.

Ιδιότητες της παραμετροποίησης καμπύλης με το μήκος τόξου:

(1) Τα διανύσματα ταχύτητας της καμπύλης που αντιστοιχούν στις δύο διαφορετικές παραμετροποιήσεις συνδέονται με σχέση που προκύπτει άμεσα από τον κανόνα της αλυσίδας:

$$\vec{p}'(s) = t'(s) \vec{r}'(t(s)) \quad \text{ή πιο απλά} \quad \frac{d\vec{p}}{ds} = \frac{dt}{ds} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Αλλά

$$\frac{dt}{ds} = \left(\frac{ds}{dt} \right)^{-1} = (v(t))^{-1} > 0$$

και επομένως τα δύο διανύσματα ταχύτητας $\frac{d\vec{p}}{ds}$ και $\frac{d\vec{r}}{dt}$ είναι συγγραμμικά.

(2) Το διάνυσμα ταχύτητας της καμπύλης με παράμετρο το μήκος τόξου είναι μοναδιαίο.

Πράγματι, ισχύει

$$\left| \frac{d\vec{p}}{ds} \right| = \frac{dt}{ds} \cdot \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| = (v(t))^{-1} \cdot v(t) = 1$$

- (3) Το διάνυσμα ταχύτητας και το διάνυσμα επιτάχυνσης της καμπύλης με παράμετρο το μήκος τόξου είναι κάθετα μεταξύ τους. Αυτό προκύπτει εύκολα από την προηγούμενη ιδιότητα αφού αν παραγωγίσουμε τη σχέση

$$\vec{p}'(s) \cdot \vec{p}'(s) = 1$$

θα έχουμε

$$2\vec{p}'(s) \cdot \vec{p}''(s) = 0$$

που αποδεικνύει ότι τα διανύσματα $\vec{p}'(s)$ και $\vec{p}''(s)$ είναι κάθετα.

Σε κάθε σημείο μίας ομαλής καμπύλης ορίζονται τρία μοναδιαία διανύσματα τα οποία είναι κάθετα μεταξύ τους και παρέχουν πληροφορίες για τη συμπεριφορά της καμπύλης. Υποθέτουμε πάντοτε ότι η ίδια καμπύλη μπορεί να παρασταθεί παραμετρικά είτε ως $\vec{r}(t)$, είτε ως $\vec{p}(s)$.

- (1) **Το εφαπτόμενο διάνυσμα:** Είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στη διεύθυνση του διανύσματος της ταχύτητας που εφάπτεται σε κάθε σημείο της καμπύλης και υπολογίζεται από τις σχέσεις

$$\vec{e}_0(s) = \vec{p}'(s) \quad \text{και} \quad \vec{e}_0(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|}$$

- (2) **Το διάνυσμα πρώτης καθέτου:** Είναι το μοναδιαίο διάνυσμα που ορίζεται

$$\vec{\eta}_0(s) = \frac{\vec{p}''(s)}{|\vec{p}''(s)|} \quad \text{και} \quad \vec{\eta}_0(t) = \frac{(\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)) \times \vec{r}'(t)}{|(\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)) \times \vec{r}'(t)|} = \frac{(\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)) \times \vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)| |\vec{r}'(t)|}$$

Το διάνυσμα $\vec{p}''(s)$ ονομάζεται **διάνυσμα καμπυλότητας** ενώ το μήκος του

$$k(s) = |\vec{p}''(s)|$$

ονομάζεται **καμπυλότητα** της καμπύλης σε κάθε σημείο της. Σαν **ακτίνα καμπυλότητας** ορίζεται η

$$\frac{1}{k(s)} = \frac{1}{|\vec{p}''(s)|}.$$

Στην περίπτωση που η καμπύλη δίνεται με παράμετρο το t , η καμπυλότητα σε κάθε σημείο υπολογίζεται από τη σχέση

$$k(t) = \frac{|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)|}{|\vec{r}'(t)|^3}.$$

Στους \mathbf{R}^2 και \mathbf{R}^3 η καμπυλότητα υπολογίζεται από τις παρακάτω σχέσεις ως προς τις συνιστώσες $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ (για συντομία γράφουμε απλά x, y, z).

$$k(t) = \frac{|x'y'' - x''y'|}{[(x')^2 + (y')^2]^{3/2}} \quad \text{και} \quad k(t) = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}^2}}{[(x')^2 + (y')^2 + (z')^2]^{3/2}}$$

Στην απλούστερη περίπτωση όπου η καμπύλη δίνεται στο επίπεδο με την αναλυτική μορφή $y = y(x)$, η καμπυλότητά της σε κάθε σημείο δίνεται από την σχέση

$$k(x) = \frac{|y''(x)|}{[1 + (y')^2]^{3/2}}$$

(3) **Το διάνυσμα δεύτερης καθέτου**: Είναι το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο που ορίζουν τα \vec{e}_0 και $\vec{\eta}_0$ και δίνεται από τις σχέσεις:

$$\vec{b}_0(s) = \vec{e}_0(s) \times \vec{\eta}_0(s) \quad \text{και} \quad \vec{b}_0(t) = \frac{\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)}{|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)|}.$$

Η συνεχής συνάρτηση που ορίζεται $\sigma(s) = \left| \frac{d\vec{b}_0(s)}{ds} \right|$ ονομάζεται **στρέψη** της καμπύλης

και ο τύπος υπολογισμού της όταν η καμπύλη δίνεται με παράμετρο το t είναι

$$\sigma(t) = \frac{(\vec{r}'(t), \vec{r}''(t), \vec{r}'''(t))}{|\vec{r}' \times \vec{r}''|^2}$$

όπου στον αριθμητή έχουμε το μικτό γινόμενο (§1.2) των τριών πρώτων παραγώγων

$$(\vec{r}'(t), \vec{r}''(t), \vec{r}'''(t)) = \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}$$

Η συνάρτηση $\frac{1}{\sigma(s)}$ ονομάζεται **ακτίνα στρέψης** της καμπύλης. Μία καμπύλη $\vec{r}(t)$

είναι **επίπεδη** (δηλαδή βρίσκεται ολόκληρη πάνω σε ένα επίπεδο) αν και μόνο αν η στρέψη της είναι μηδενική για όλα τα t .

Σημείωση: Στις εφαρμογές, όπου η καμπύλη δίνεται συνήθως με παράμετρο το t και οι πράξεις είναι αρκετά πολύπλοκες, συμφέρει να υπολογίζουμε πρώτα το $\vec{e}_0(t)$, μετά το $\vec{b}_0(t)$ από τους αντίστοιχους τύπους και στη συνέχεια το $\vec{\eta}_0(t)$ από τη σχέση

$$\vec{\eta}_0(t) = \vec{b}_0(t) \times \vec{\epsilon}_0(t).$$

Τα διανύσματα $\vec{\epsilon}_0$, $\vec{\eta}_0$ και \vec{b}_0 ορίζουν σε κάθε σημείο της καμπύλης ένα τρισορθογώνιο σύστημα το οποίο ονομάζεται **τρίακμο του Frenet**. Τα τρία διανύσματα ορίζουν και τρία κάθετα μεταξύ τους επίπεδα στο τυχαίο σημείο της καμπύλης με διάνυσμα θέσης \vec{r}_0 :

- Το **εγγύτατο** επίπεδο που ορίζεται από τα $\vec{\epsilon}_0$ και $\vec{\eta}_0$ με εξίσωση $(\vec{R} - \vec{r}_0)\vec{b}_0 = 0$
- Το **κάθετο** επίπεδο που ορίζεται από τα $\vec{\eta}_0$ και \vec{b}_0 με εξίσωση $(\vec{R} - \vec{r}_0)\vec{\epsilon}_0 = 0$
- Το **ευθειοποιούν** επίπεδο που ορίζεται από τα \vec{b}_0 και $\vec{\epsilon}_0$ με εξίσωση $(\vec{R} - \vec{r}_0)\vec{\eta}_0 = 0$

Οι λεγόμενοι **τύποι των Frenet – Serret** συνδέουν τα τρία μοναδιαία διανύσματα με την καμπυλότητα και τη στρέψη της καμπύλης:

$$\frac{d\vec{\epsilon}_0}{ds} = k\vec{\eta}_0, \quad \frac{d\vec{\eta}_0}{ds} = -k\vec{\epsilon}_0 + \sigma\vec{b}_0, \quad \frac{d\vec{b}_0}{ds} = -\sigma\vec{\eta}_0$$

Οι τύποι αυτοί γράφονται ευκολότερα με τη μορφή πινάκων

$$\begin{pmatrix} \vec{\epsilon}'_0 \\ \vec{\eta}'_0 \\ \vec{b}'_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \sigma \\ 0 & -\sigma & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\epsilon}_0 \\ \vec{\eta}_0 \\ \vec{b}_0 \end{pmatrix}$$

Παράδειγμα 2.8

Θεωρούμε την καμπύλη $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $t \in \mathbf{R}$. Θα βρούμε για το σημείο $t_0 = \frac{\pi}{2}$:

- (α) τα τρία μοναδιαία διανύσματα του τρίακμου Frenet $\vec{\epsilon}_0$, $\vec{\eta}_0$ και \vec{b}_0 ,
- (β) τις εξισώσεις των επιπέδων που ορίζουν τα τρία διανύσματα και
- (γ) την καμπυλότητα και τη στρέψη της καμπύλης.

Αρχικά βρίσκουμε τις τρεις πρώτες παραγώγους της καμπύλης που θα χρειαστούν για τους υπολογισμούς που θα ακολουθήσουν.

$$\vec{r}'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$$

$$\vec{r}''(t) = (-\cos t, -\sin t, 0)$$

$$\vec{r}'''(t) = (\sin t, -\cos t, 0)$$

2. Διανυσματικές συναρτήσεις πραγματικής μεταβλητής

(α) Σε κάθε σημείο της καμπύλης το εφαπτόμενο διάνυσμα θα είναι

$$\vec{\varepsilon}_0(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|} = \frac{(-\sin t, \cos t, 1)}{\sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin t, \cos t, 1).$$

Για το διάνυσμα της δεύτερης καθέτου υπολογίζουμε πρώτα το εξωτερικό γινόμενο

$$\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) = \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ -\sin t & \cos t & 1 \\ -\cos t & -\sin t & 0 \end{vmatrix} = (\sin t \vec{x}_0 - \cos t \vec{y}_0 + \vec{z}_0)$$

οπότε

$$\vec{b}_0(t) = \frac{\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)}{|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)|} = \frac{(\sin t, -\cos t, 1)}{\sqrt{(\sin t)^2 + (-\cos t)^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin t, -\cos t, 1)$$

Το διάνυσμα της πρώτης καθέτου προκύπτει από τη σχέση

$$\vec{\eta}_0(t) = \vec{b}_0(t) \times \vec{\varepsilon}_0(t) = \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \sin t & -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos t & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin t & \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = -\cos t \vec{x}_0 - \sin t \vec{y}_0 = (-\cos t, -\sin t, 0).$$

Ειδικά για το σημείο $t_0 = \frac{\pi}{2}$:

$$\vec{\varepsilon}_0\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1) \quad \vec{\eta}_0\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0, -1, 0) \quad \vec{b}_0\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1).$$

(β) Για να βρούμε τις εξισώσεις των τριών επιπέδων στο σημείο $t_0 = \frac{\pi}{2}$, εργαζόμαστε ως εξής: Υποθέτουμε ότι το κάθε σημείο του ζητούμενου επιπέδου έχει διάνυσμα θέσης της μορφής:

$$\vec{R} = (x, y, z)$$

Το διάνυσμα θέσης του σημείου της καμπύλης που αντιστοιχεί στο $t_0 = \frac{\pi}{2}$ είναι:

$$\vec{r}_0 = \vec{r}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\cos \frac{\pi}{2}, \sin \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = \left(0, 1, \frac{\pi}{2}\right).$$

2. Διανυσματικές συναρτήσεις πραγματικής μεταβλητής

Άρα για το εγγύτατο επίπεδο

$$(\vec{R} - \vec{r}_0) \vec{b}_0 = 0$$

αντικαθιστούμε τα παραπάνω και παίρνουμε διαδοχικά

$$\left((x-0), (y-1), \left(z - \frac{\pi}{2} \right) \right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 0,$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(z - \frac{\pi}{2} \right) = 0$$

και τελικά

$$x + z = \frac{\pi}{2}.$$

Όμοια για το κάθετο επίπεδο καταλήγουμε στην εξίσωση

$$-x + z = \frac{\pi}{2}$$

και για το ευθειοποιούν στην εξίσωση

$$y = 1.$$

(γ) Η καμπυλότητα της καμπύλης σε κάθε σημείο της είναι

$$k(t) = \frac{|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)|}{|\vec{r}'(t)|^3} = \frac{\sqrt{(\sin t)^2 + (-\cos t)^2 + 1^2}}{\left(\sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + 1^2} \right)^3} = \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^3} = \frac{1}{2}$$

δηλαδή είναι σταθερή, ανεξάρτητη του t , οπότε και στο σημείο $t_0 = \frac{\pi}{2}$ θα είναι

$$k\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Η στρέψη της είναι

$$\sigma(t) = \frac{(\vec{r}'(t), \vec{r}''(t), \vec{r}'''(t))}{|\vec{r}' \times \vec{r}''|^2} = \frac{\begin{vmatrix} -\sin t & \cos t & 1 \\ -\cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & -\cos t & 0 \end{vmatrix}}{(\sin t)^2 + (-\cos t)^2 + 1^2} = \frac{1}{2}$$

δηλαδή είναι σταθερή και αυτή για όλες τις τιμές του t . Επομένως,

$$\sigma\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}.$$

Στο Σχήμα 2.5 βλέπουμε τη γραφική παράσταση τμήματος της καμπύλης $\vec{r}(t)=(\cos t, \sin t, t)$ με το t να παίρνει τιμές στο διάστημα $[0, 6\pi]$. Φαίνεται καθαρά το σημείο της καμπύλης που αντιστοιχεί στην τιμή $t_0 = \pi/2$ και τα τρία μοναδιαία, ανά δύο ορθογώνια διανύσματα που σχηματίζουν το τρίακμο του Frenet. Στο σημείο αυτό είναι χρήσιμο να αναφέρουμε τον τρόπο με τον οποίο έγινε το Σχήμα 2.5 με τη χρήση του μαθηματικού προγράμματος Mathematica. Η καμπύλη σχεδιάζεται δίνοντας απλά τις παραμετρικές εξισώσεις των συνιστωσών και δηλώνοντας το πεδίο από όπου θα πάρει τιμές το t . Σχετική δυσκολία συναντάμε στον σχεδιασμό των τριών διανυσμάτων. Εδώ πρέπει να τονίσουμε ότι τα διανύσματα, έτσι όπως τα υπολογίσαμε προηγουμένως, έχουν όλα αρχικό σημείο την αρχή των αξόνων και τελικά σημεία αντίστοιχα για τα \vec{e}_0 , $\vec{\eta}_0$ και \vec{b}_0 τα

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad (0, -1, 0), \quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

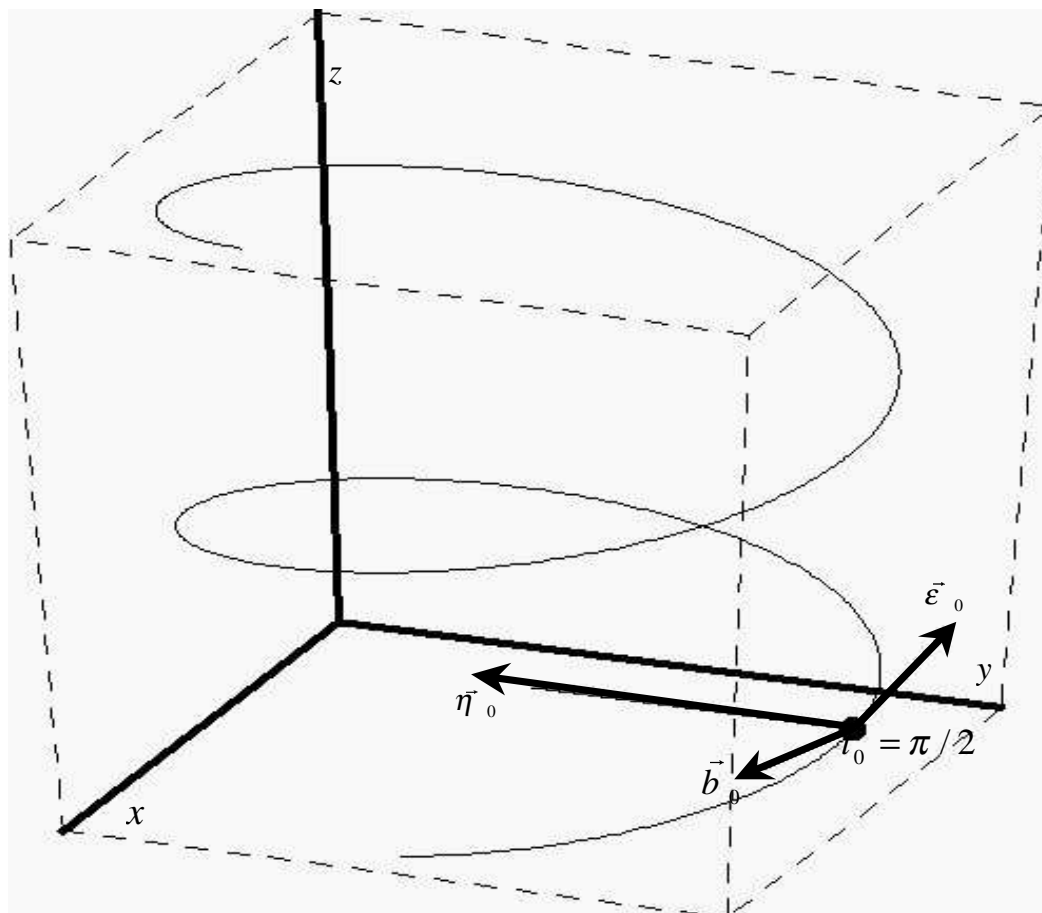
Για να παραστήσουμε στο γράφημά μας τα τρία αυτά διανύσματα πρέπει να τα μεταφέρουμε (να βρούμε δηλαδή τα ισοδύναμά τους) έτσι ώστε να έχουν όλα αρχικό σημείο το σημείο της καμπύλης που αντιστοιχεί στο $t_0 = \pi/2$. Το σημείο αυτό είναι το $(0, 1, \pi/2)$. Σύμφωνα με τα όσα αναφέραμε στην §1.2 για τα ισοδύναμα διανύσματα, τα τελικά σημεία τους τώρα θα είναι αντίστοιχα:

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 1, \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{2}\right), \quad \left(0, 0, \frac{\pi}{2}\right), \quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1, \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{2}\right).$$

Οι παραμετρικές εξισώσεις των ευθειών που περνούν από το $(0, 1, \pi/2)$ και έχουν τη διεύθυνση των διανυσμάτων είναι αντίστοιχα:

$$\left(-t, 1, \frac{\pi}{2} + t\right), \quad \left(0, 1-t, \frac{\pi}{2}\right), \quad \left(t, 1, \frac{\pi}{2} + t\right).$$

Βλέπουμε δηλαδή με το παράδειγμα αυτό, ότι οι γραφικές παραστάσεις μπορεί να είναι χρήσιμες για την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών αλλά η δημιουργία τους απαιτεί γνώση της ανάλογης θεωρίας.



Σχήμα 2.5: Η έλικά και το τρίακμο Frenet στο σημείο $t_0 = \pi/2$.

Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο 3

Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε τις βασικές έννοιες σχετικά με τις πραγματικές συναρτήσεις σημείων του χώρου. Οι συναρτήσεις αυτές μπορούν να θεωρηθούν επέκταση των συναρτήσεων μίας μεταβλητής που γνωρίζουμε στο επίπεδο. Οι βασικές έννοιες του διαφορικού και ολοκληρωτικού λογισμού επεκτείνονται επίσης με την εισαγωγή των μερικών παραγώγων και των πολλαπλών ολοκληρωμάτων που θα συναντήσουμε σε επόμενα κεφάλαια.

§3.1. Πραγματικές συναρτήσεις n μεταβλητών

Έστω D ένα σύνολο σημείων στον n -χώρο. Μία **συνάρτηση** που ορίζεται στο D είναι μία σχέση η οποία αντιστοιχεί σε κάθε σημείο του D έναν πραγματικό αριθμό. Θα ονομάζουμε λοιπόν **πραγματική συνάρτηση n μεταβλητών με πεδίο ορισμού το D** τη σχέση

$$f : D \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}.$$

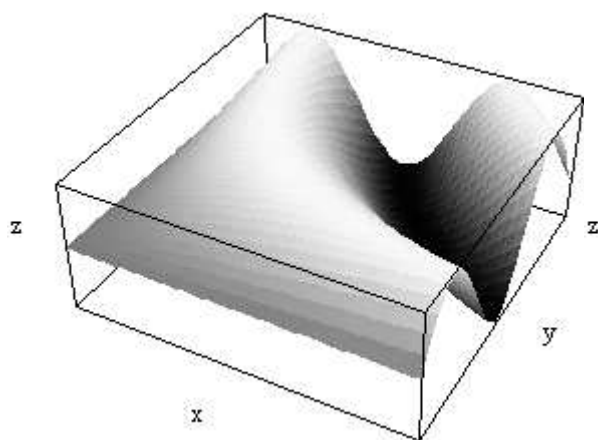
Την τιμή μίας τέτοιας συνάρτησης τη συμβολίζουμε με $f(x_1, \dots, x_n)$ ή εναλλακτικά με $f(P)$ ή $f(\vec{x})$ όπου με τους δύο τελευταίους συμβολισμούς εννοούμε την τιμή της συνάρτησης στο σημείο $P = (x_1, \dots, x_n)$ ή ισοδύναμα στο διάνυσμα θέσης $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$.

Όπως και με τις συναρτήσεις μίας μεταβλητής ορίζουμε σαν **γράφημα** της συνάρτησης $f : D \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ το σύνολο των σημείων στον $(n+1)$ -χώρο της μορφής

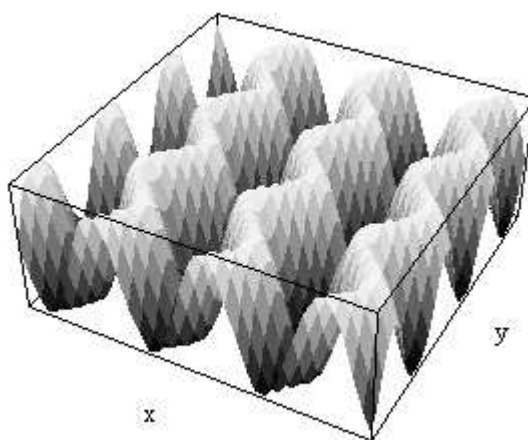
$$(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)).$$

3. Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

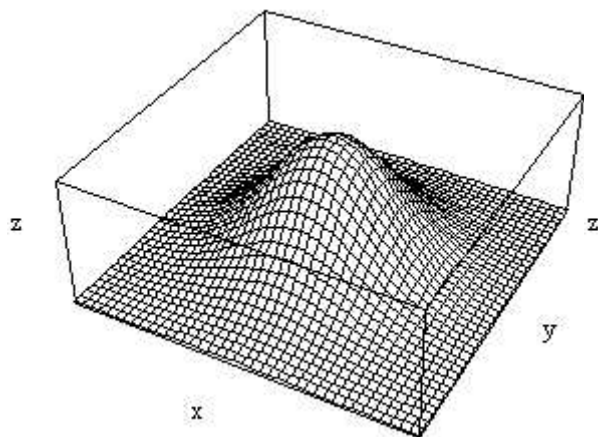
Στην περίπτωση όπου $n=1$, το γράφημα της συνάρτησης είναι, ως γνωστό, το σύνολο των σημείων $(x, f(x))$. Όταν $n=2$, το γράφημα της συνάρτησης θα είναι το σύνολο των σημείων $(x, y, f(x, y))$. Βεβαίως, η γραφική παράσταση σε χώρους περισσότερων διαστάσεων είναι αδύνατη. Ακόμη και για $n=2$, είναι πολύ δύσκολο ή αδύνατο να σχεδιάσει κανείς τη γραφική παράσταση μίας συνάρτησης δύο μεταβλητών χωρίς τη βοήθεια ηλεκτρονικού υπολογιστή εφοδιασμένου με κατάλληλο μαθηματικό πρόγραμμα. Στο Σχήμα 3.1 παρουσιάζονται γραφήματα ορισμένων συναρτήσεων δύο μεταβλητών. Όπως βλέπουμε, η εικόνα ενός τέτοιου γραφήματος είναι μία επιφάνεια στον χώρο.



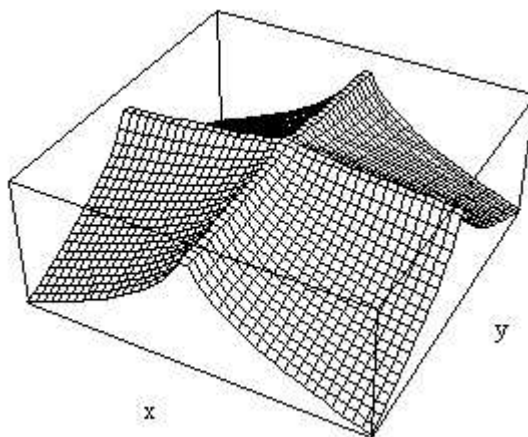
$$f(x, y) = \sin(xy)$$



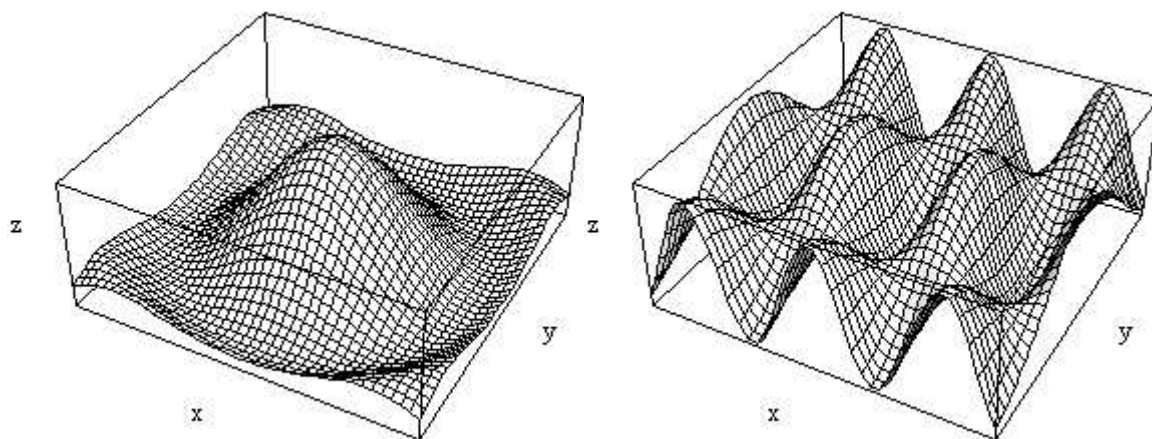
$$f(x, y) = 10[\sin(x + \sin y)]$$



$$f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$$



$$f(x, y) = -\sqrt{|xy|}$$



$$f(x, y) = \frac{1}{3 + x^2 + y^2} \cos\left(\frac{x^2 + y^2}{4}\right)$$

$$f(x, y) = -\cos\left(\frac{3\pi x}{10}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi y}{10}\right)$$

Σχήμα 3.1: Γραφήματα συναρτήσεων δύο μεταβλητών

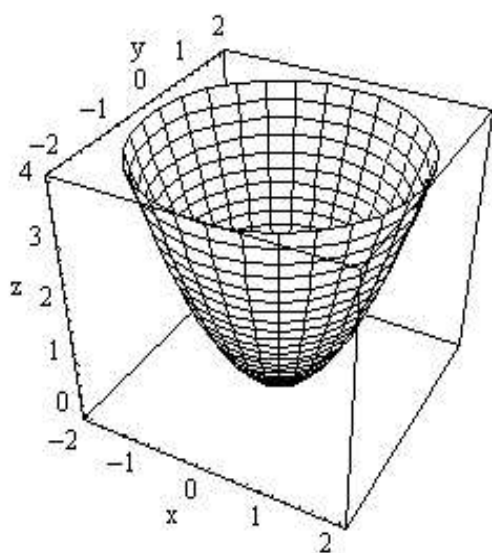
Εξαιτίας της αδυναμίας που έχουμε να μελετήσουμε και να κατανοήσουμε το γράφημα συνάρτησης δύο ή περισσότερων μεταβλητών, χρησιμοποιούμε άλλες μεθόδους απεικόνισης. Έστω λοιπόν μία συνάρτηση $f : D \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ και $c \in \mathbf{R}$. Ονομάζουμε **σύνολο στάθμης** της f στο c , το σύνολο όλων των σημείων $P = (x_1, \dots, x_n) \in D$ για τα οποία ισχύει $f(P) = c$. Ειδικά για την περίπτωση $n = 2$, το σύνολο των σημείων για τα οποία $f(x, y) = c$ ονομάζεται **καμπύλη στάθμης** (ή ισοσταθμική καμπύλη) της f στο c ενώ όταν $n = 3$, το σύνολο των σημείων για τα οποία $f(x, y, z) = c$ ονομάζεται **επιφάνεια στάθμης** της f στο c .

Παράδειγμα 3.1

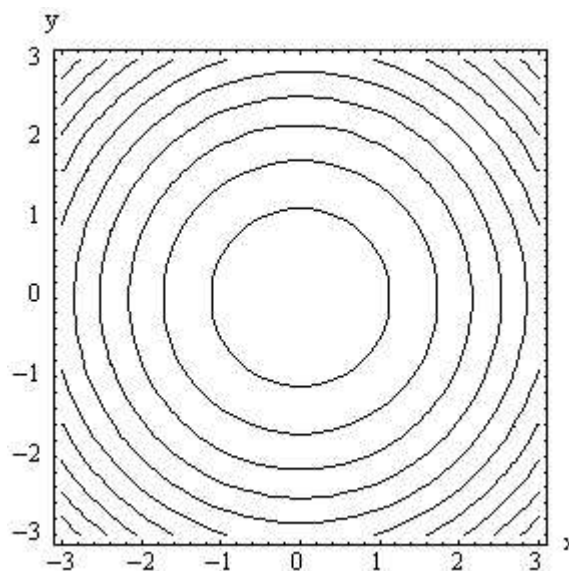
Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση δύο μεταβλητών $z = f(x, y) = x^2 + y^2$. Το γράφημα της συνάρτησης είναι η παραβολοειδής επιφάνεια που φαίνεται στο Σχήμα 3.2 (α). Οι καμπύλες στάθμης της συνάρτησης f σε τυχαίο θετικό πραγματικό αριθμό c , θα είναι τα σύνολα των σημείων (x, y) για τα οποία ισχύει $f(x, y) = c$ ή $x^2 + y^2 = c$. Οι καμπύλες στάθμης δηλαδή είναι ομόκεντροι κύκλοι με ακτίνα \sqrt{c} . Στο Σχήμα 3.2 (β) βλέπουμε μερικές από τις καμπύλες αυτές.

Σημειώνουμε εδώ ότι κάθε μία από τις καμπύλες στάθμης παριστά σημεία στο χώρο τα οποία ανήκουν στην επιφάνεια της καμπύλης και επιπλέον βρίσκονται όλα στο ίδιο ακριβώς ύψος. Έχουν μεγάλη εφαρμογή στον σχεδιασμό χαρτών της επιφάνειας της γης και μετεωρολογικών χαρτών. Ανάλογα με τη χρήση τους παίρνουν σχετικές ονομασίες όπως ισοβαρείς, ισοϋψείς, ισοθερμικές κ.λ.π..

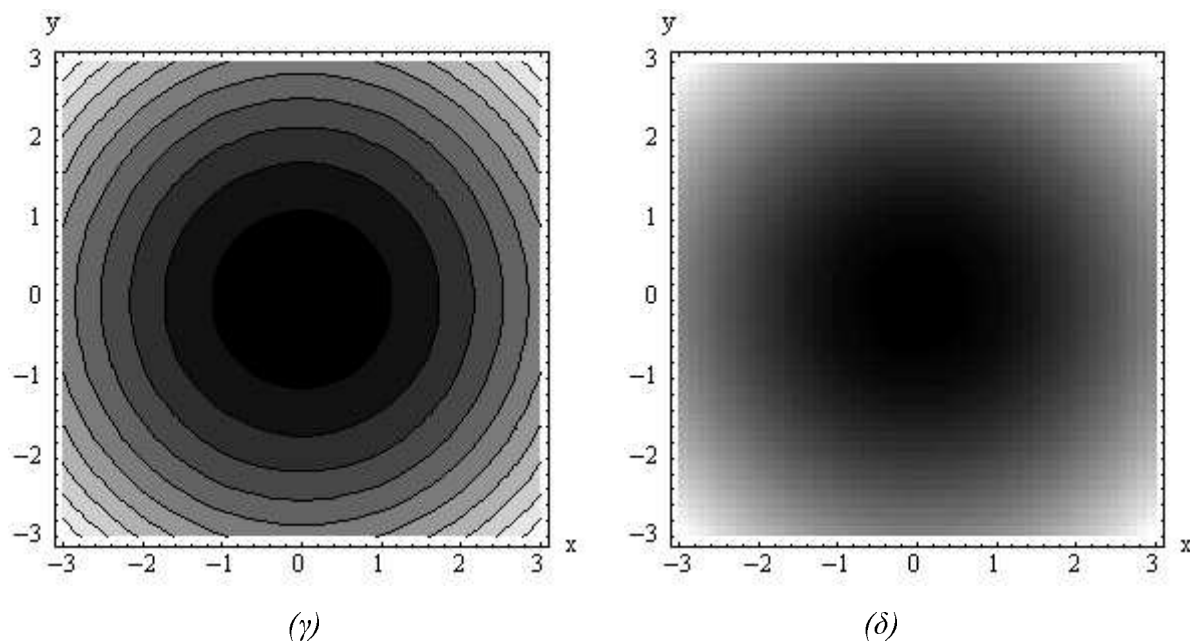
Το γράφημα των καμπυλών στάθμης παρέχει σημαντική πληροφορία για την επιφάνεια που ορίζει η συνάρτηση. Μόνο από τους κύκλους του Σχ. 3.2 (β) μπορούμε να καταλάβουμε ότι η επιφάνεια είναι ένα παραβολοειδές. Συχνά όμως μας ενδιαφέρει να συμπεράνουμε από τις καμπύλες στάθμης (την προβολή ουσιαστικά της επιφάνειας πάνω στο επίπεδο Oxy) πως αυξομειώνεται το ύψος της επιφάνειας. Για τον λόγο αυτό φροντίζουμε να χρωματίσουμε το διάγραμμα των καμπυλών στάθμης με τέτοιο τρόπο ώστε οι περιοχές κοντά στο επίπεδο Oxy να σκιάζονται με σκοτεινές αποχρώσεις, ενώ όσο απομακρυνόμαστε από το επίπεδο Oxy οι σκιάσεις να είναι περισσότερο φωτεινές. Αυτό ακριβώς βλέπουμε στο Σχήμα 3.2, στα πλαίσια (γ) και (δ). Μάλιστα στο (δ) έχουμε μία πιο ομαλή μετάβαση από στάθμη σε στάθμη. Το σχήμα αυτό ονομάζεται **διάγραμμα πυκνότητας**. Στα διαγράμματα πυκνότητας τα σημεία της επιφάνειας που βρίσκονται στο ίδιο ύψος έχουν την ίδια απόχρωση η οποία σταδιακά μεταβάλλεται με το ύψος.



(α)



(β)



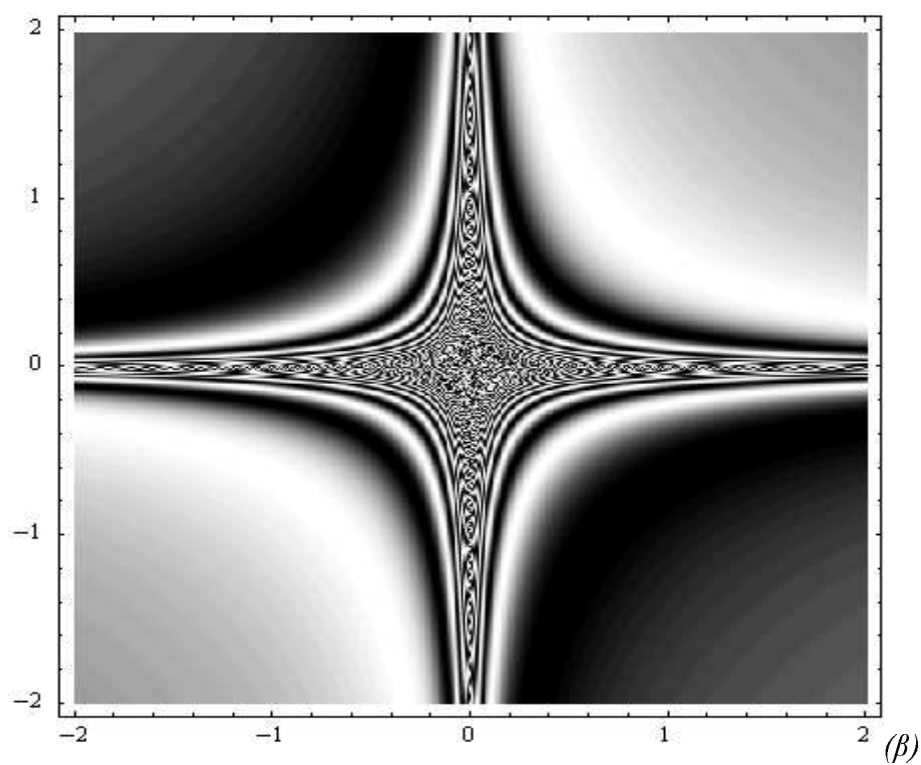
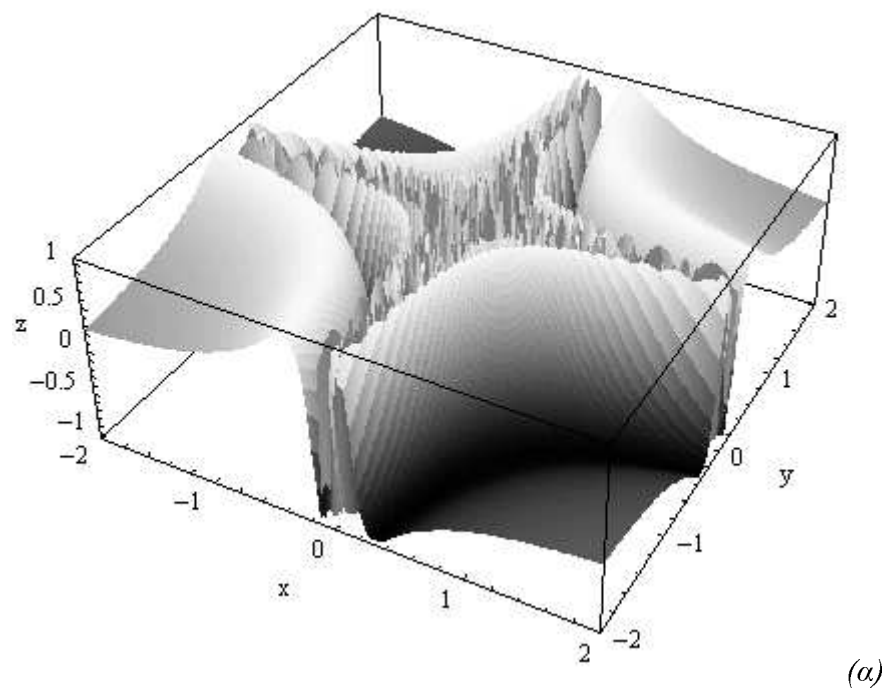
Σχήμα 3.2: Η συνάρτηση $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ και οι καμπύλες στάθμης

Παράδειγμα 3.2

Η συνάρτηση που εξετάσαμε στο προηγούμενο παράδειγμα είναι αρκετά εύκολη στην απεικόνισή της ακόμη και χωρίς τη βοήθεια υπολογιστή. Συνήθως όμως έχουμε να αντιμετωπίσουμε συναρτήσεις που το γράφημά τους παρουσιάζει εξαιρετικές ιδιομορφίες. Σε αυτές τις περιπτώσεις η σχεδίαση του διαγράμματος πυκνότητας είναι απαραίτητη. Σαν

παράδειγμα μίας τέτοιας συνάρτησης αναφέρουμε την $f(x, y) = \sin\left(\frac{1}{xy}\right)$. Στο Σχήμα 3.3 (α)

βλέπουμε την ιδιομορφία που υπάρχει κατά μήκος των αξόνων x και y αλλά είναι αδύνατο να έχουμε πλήρη εικόνα της συμπεριφοράς αυτής. Το πραγματικά εντυπωσιακό διάγραμμα πυκνότητας (Σχ. 3.3 (β)) δίνει σχεδόν τρισδιάστατη αντίληψη της ιδιομορφίας παρέχοντας σημαντικότερη πληροφορία.



Σχήμα 3.3: Το γράφημα και το διάγραμμα πυκνότητας της $f(x, y) = \sin\left(\frac{1}{xy}\right)$.

Παράδειγμα 3.3

Έστω η συνάρτηση τριών μεταβλητών $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Οι επιφάνειες στάθμης της συνάρτησης f σε τυχαίο θετικό πραγματικό αριθμό c , θα είναι τα σύνολα των σημείων (x, y, z) για τα οποία ισχύει $f(x, y, z) = c$ ή $x^2 + y^2 + z^2 = c$. Οι επιφάνειες στάθμης δηλαδή είναι ομόκεντρες σφαίρες με ακτίνα \sqrt{c} .

§3.2. Μερικές παράγωγοι

Θα ασχοληθούμε στην παράγραφο αυτή με την έννοια της παραγωγίσης συναρτήσεων πολλών μεταβλητών. Όταν μελετούμε την παραγωγή στις συναρτήσεις μίας μεταβλητής, υποθέτουμε ότι η συνάρτηση ορίζεται σε ένα διάστημα των πραγματικών αριθμών. Στην περίπτωση των πολλών μεταβλητών πρέπει να κάνουμε παρόμοιες υποθέσεις για το πεδίο ορισμού της συνάρτησης, οπότε είναι ανάγκη να ορίσουμε και νέες έννοιες.

Έστω $P = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbf{R}^n$ και $a \in \mathbf{R}$, $a > 0$. Το σύνολο των σημείων $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ για τα οποία ισχύει

$$|X - P| < a \quad \text{ή} \quad \sqrt{(x_1 - p_1)^2 + \dots + (x_n - p_n)^2} < a$$

ονομάζεται **ανοιχτή μπάλα** κέντρου P και ακτίνας a . Αντίστοιχα, το σύνολο των σημείων $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ για τα οποία ισχύει

$$|X - P| \leq a \quad \text{ή} \quad \sqrt{(x_1 - p_1)^2 + \dots + (x_n - p_n)^2} \leq a$$

ονομάζεται **κλειστή μπάλα** κέντρου P και ακτίνας a . Το σύνολο των σημείων $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ για τα οποία ισχύει

$$|X - P| = a \quad \text{ή} \quad \sqrt{(x_1 - p_1)^2 + \dots + (x_n - p_n)^2} = a$$

ονομάζεται **σφαίρα** κέντρου P και ακτίνας a .

Σαν ειδικές περιπτώσεις των παραπάνω ορισμών έχουμε:

- Για $n=1$, βρίσκουμε στον μονοδιάστατο χώρο των πραγματικών αριθμών. Η ανοιχτή (κλειστή) μπάλα κέντρου P και ακτίνας a είναι ένα ανοιχτό (κλειστό) διάστημα με

3. Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

κέντρο το P . Η σφαίρα κέντρου P και ακτίνας a αποτελείται από μόνο δύο σημεία, τα άκρα του διαστήματος.

- Για $n=2$, η ανοιχτή (κλειστή) μπάλα κέντρου P και ακτίνας a ονομάζεται και ανοιχτός (κλειστός) **δίσκος**. Η σφαίρα εδώ είναι ο **κύκλος**.
- Για $n=3$, η όροι «μπάλα» και «σφαίρα» συμπίπτουν απόλυτα με τις έννοιες που περιγράφουν οι λέξεις.

Έστω $U \subseteq \mathbf{R}^n$, ένα σύνολο σημείων στον n -χώρο. Το U θα ονομάζεται **ανοιχτό σύνολο** στον n -χώρο αν ικανοποιείται η συνθήκη: Για οποιοδήποτε σημείο $P \in U$, υπάρχει μία ανοιχτή μπάλα με κέντρο το P και ακτίνα $a > 0$ η οποία περιέχεται ολόκληρη στο U .

Σημείωση: Ένα σύνολο το οποίο είναι ανοιχτό σε έναν m -χώρο, δε σημαίνει αναγκαστικά ότι είναι ανοιχτό σε έναν άλλο n -χώρο.

Παράδειγμα 3.4

Ο άξονας x , αν θεωρηθεί σαν σύνολο σημείων του 1-χώρου είναι ένα ανοιχτό σύνολο αφού για κάθε σημείο του υπάρχει πάντοτε τουλάχιστον ένα ανοιχτό διάστημα που περιέχεται ολόκληρο στον άξονα. x . Για τον ίδιο λόγο το διάστημα $(-1,1)$ είναι επίσης ένα ανοιχτό σύνολο του 1-χώρου. Αν τα δύο παραπάνω σύνολα όμως τα θεωρήσουμε σαν σύνολα σημείων του 2-χώρου, τότε συμπεραίνουμε ότι δεν είναι ανοιχτά σύνολα. Πράγματι, αν δοθεί οποιοδήποτε σημείο του x άξονα, δεν είναι δυνατό, σε καμία περίπτωση, να βρούμε έναν ανοιχτό δίσκο με κέντρο το συγκεκριμένο σημείο που να περιέχεται ολόκληρος πάνω στον άξονα. Όμοια, και για το διάστημα $(-1,1)$.

Για τον ορισμό της παραγώγου συνάρτησης f μίας μεταβλητής σαν όριο,

$$\frac{df}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

χρειάστηκε να υποθέσουμε ότι η συνάρτηση ορίζεται σε κάποιο ανοιχτό διάστημα γύρω από το σημείο x . Αντίστοιχα, τώρα θεωρούμε την f σαν συνάρτηση n μεταβλητών, ορισμένη σε ένα ανοιχτό σύνολο $U \subseteq \mathbf{R}^n$. Αυτό σημαίνει, ότι όταν η συνάρτηση ορίζεται σε ένα σημείο $X = (x_1, \dots, x_n) \in U$, ορίζεται ακόμη και σε όλα τα γειτονικά σημεία του, δηλαδή σε

3. Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

όλα τα σημεία που περιέχονται σε μία ανοιχτή μπάλα με κέντρο το X και η οποία περιέχεται ολόκληρη στο U .

Με την παραπάνω υπόθεση, ουσιαστικά διασφαλίζουμε ότι η συνάρτηση f ορίζεται σε όλα τα σημεία της μορφής

$$(x_1, \dots, x_i + h, \dots, x_n),$$

όπου το h είναι ένας πολύ μικρός πραγματικός αριθμός.

Ορίζουμε σαν **μερική παράγωγο** της f ως προς τη μεταβλητή x_i , $i = 1, \dots, n$, το όριο

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i + h, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}{h},$$

εφόσον βέβαια αυτό το όριο υπάρχει. Πρέπει να επισημάνουμε ότι οι μερικές παράγωγοι της f είναι επίσης πραγματικές συναρτήσεις n μεταβλητών. Στην πράξη ο υπολογισμός της μερικής παραγώγου ως προς τη μεταβλητή x_i γίνεται κρατώντας τις υπόλοιπες μεταβλητές σταθερές και παραγωγίζοντας μόνο ως προς τη x_i .

Για τις συναρτήσεις $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ χρησιμοποιούμε τους συμβολισμούς:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \equiv f_x \quad \text{και} \quad \frac{\partial f}{\partial y} \equiv f_y,$$

ενώ για τις συναρτήσεις $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ τους συμβολισμούς:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \equiv f_x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} \equiv f_y, \quad \frac{\partial f}{\partial z} \equiv f_z.$$

Για να δηλώσουμε ότι αναφερόμαστε στην τιμή μίας μερικής παραγώγου (π.χ. της $\frac{\partial f}{\partial x}$) σε συγκεκριμένο σημείο $P = (x_0, y_0, z_0)$, χρησιμοποιούμε τους συμβολισμούς:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0), \quad \frac{\partial f}{\partial x}(P), \quad \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0, z_0)}, \quad \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_P$$

Παράδειγμα 3.5

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x, y) = \cos xy + x \cos y$. Θα υπολογίσουμε τις μερικές παραγώγους της f ως προς x και y καθώς και τις τιμές τους στο σημείο $(1, \pi/4)$. Πρώτα για να βρούμε την $\partial f / \partial x$ κρατάμε σταθερό το y και παραγωγίζουμε ως προς x :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{d(\cos xy + x \cos y)}{dx} = -y \sin xy + \cos y .$$

Όμοια, για να βρούμε την $\partial f / \partial y$, κρατάμε σταθερό το x και παραγωγίζουμε ως προς y :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{d(\cos xy + x \cos y)}{dy} = -x \sin xy - x \sin y .$$

Η τιμές τους στο σημείο $(1, \pi/4)$ είναι:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(1, \pi/4)} = -\frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{\pi}{4} \right),$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(1, \pi/4)} = -\sin \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{4} = -\sqrt{2}$$

Η γεωμετρική σημασία της παραγώγου στις συναρτήσεις μίας μεταβλητής βρίσκει το ανάλογο της και στις συναρτήσεις δύο μεταβλητών. Ας θυμηθούμε ότι αν $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, η ευθεία που εφάπτεται στην καμπύλη της συνάρτησης στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ έχει εξίσωση

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) .$$

Μπορεί να αποδειχτεί ότι και στην περίπτωση της $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$, **το εφαπτόμενο επίπεδο** στην επιφάνεια που ορίζει η συνάρτηση, στο σημείο $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ έχει εξίσωση

$$z = f(x_0, y_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right] (x - x_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right] (y - y_0)$$

Παράδειγμα 3.6

Θα βρούμε την εξίσωση του επιπέδου που εφάπτεται στο γράφημα της $z = f(x, y) = x^2 + y^4 + e^{xy}$ στο σημείο $(1, 0, 2)$. Οι μερικές παράγωγοι της συνάρτησης είναι:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + ye^{xy} \quad \text{και} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 + xe^{xy} .$$

Στο σημείο $(1, 0, 2)$ οι τιμές τους είναι

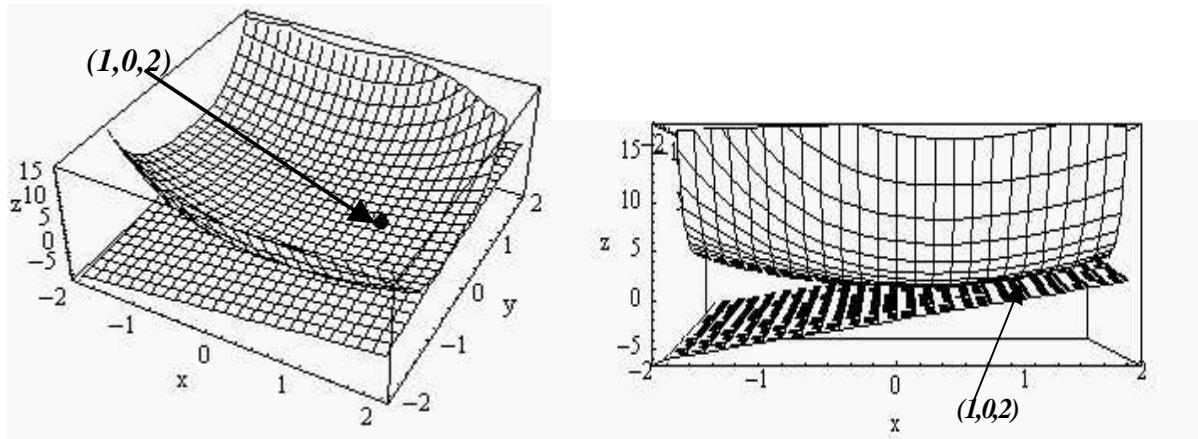
$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 0) = 2 \quad \text{και} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1, 0) = 1 .$$

Επομένως, το εφαπτόμενο επίπεδο στο σημείο $(1, 0, 2)$ έχει εξίσωση:

$$z = 2 + 2(x - 1) + 1(y - 0) \quad \text{ή} \quad z = 2x + y$$

3. Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

Στο Σχήμα 3.4 βλέπουμε το γράφημα της συνάρτησης μαζί με το εφαπτόμενο επίπεδο από δύο διαφορετικές γωνίες.



Σχήμα 3.4: Επιφάνεια και εφαπτόμενο επίπεδο σε σημείο

Έστω f συνάρτηση n μεταβλητών, ορισμένη σε ένα ανοιχτό σύνολο $U \subseteq \mathbf{R}^n$. Ας υποθέσουμε ακόμη ότι υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι της f ως προς όλες τις μεταβλητές, σε όλα τα σημεία του U . Το διάνυσμα με συνιστώσες τις μερικές παραγώγους της συνάρτησης ονομάζεται **κλίση** της f και συμβολίζεται με $gradf$ ή ∇f . Ισχύει δηλαδή

$$gradf = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right).$$

$$\text{Για } f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}, \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) \text{ ή } \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{x}_0 + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{y}_0.$$

$$\text{Για } f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}, \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \text{ ή } \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{x}_0 + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{y}_0 + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{z}_0.$$

Αν f και g δύο συναρτήσεις ορισμένες στο ίδιο ανοιχτό σύνολο $U \subseteq \mathbf{R}^n$ και $c \in \mathbf{R}$, ισχύουν οι ιδιότητες:

$$\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g,$$

$$\nabla(cf) = c\nabla f,$$

$$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$$

$$\nabla(f/g) = \frac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2} \text{ στα σημεία που δεν μηδενίζεται η } g.$$

3. Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

Έστω f συνάρτηση, ορισμένη σε ένα ανοιχτό σύνολο $U \subseteq \mathbf{R}^n$ και ένα σημείο $X = (x_1, \dots, x_n) \in U$. Αν $H = (h_1, \dots, h_n)$ είναι ένα διάνυσμα τέτοιο ώστε $|H| \rightarrow 0$, τότε το $X + H$ είναι ένα σημείο του U και επομένως ορίζεται η $f(X + H)$. Η συνάρτηση f ονομάζεται **παραγωγίσιμη στο σημείο X** , αν υπάρχουν στο σημείο οι μερικές παράγωγοι της f ως προς όλες τις μεταβλητές, και ακόμη αν

$$\lim_{|H| \rightarrow 0} \frac{f(X + H) - f(X) - \nabla f \cdot H}{|H|} = 0.$$

Η συνάρτηση ονομάζεται **παραγωγίσιμη στο ανοιχτό σύνολο $U \subseteq \mathbf{R}^n$** αν είναι παραγωγίσιμη σε όλα τα σημεία του U . Θα λέμε ότι η συνάρτηση f είναι **συνεχής** αν σε κάθε σημείο $X \in U$ ισχύει

$$\lim_{H \rightarrow (0, \dots, 0)} [f(X + H) - f(X)] = 0.$$

Προφανώς, δεν είναι εύκολο να διαπιστώσουμε αν μία συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη από τον ορισμό που δώσαμε παραπάνω. Για τον λόγο αυτό, χρησιμοποιούμε το εξής θεώρημα:

Θεώρημα: Έστω η συνάρτηση f ορίζεται στο ανοιχτό σύνολο $U \subseteq \mathbf{R}^n$. Αν οι μερικές παράγωγοι της f υπάρχουν σε κάθε σημείο του ανοιχτού συνόλου και αν επιπλέον είναι συνεχείς συναρτήσεις, η f είναι παραγωγίσιμη στο U .

Σημείωση: Είναι δυνατό να υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι μίας συνάρτησης σε ένα σημείο αλλά η συνάρτηση να μην είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό. Για να θεωρηθεί μία συνάρτηση παραγωγίσιμη σε ένα σημείο πρέπει να ικανοποιεί και κάποιες συνθήκες «ομαλότητας». Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ που ορίζεται

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{αν } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{αν } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Οι μερικές παράγωγοι της f υπάρχουν στο σημείο $(0, 0)$. Πράγματι, αν χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό, έχουμε:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h \cdot 0}{h^2 + 0^2} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$$

και

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 \cdot h}{0^2 + h^2} - 0 = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0.$$

Παρόλα αυτά, η συνάρτηση δεν είναι συνεχής στο σημείο στο $(0, 0)$ ούτε και οι μερικές παράγωγοι $f_x = \frac{y(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)}$ και $f_y = \frac{x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)}$.

§3.3. Ο κανόνας της αλυσίδας

Έστω f πραγματική συνάρτηση n μεταβλητών, ορισμένη σε ένα ανοιχτό σύνολο $U \subseteq \mathbf{R}^n$. Έστω επίσης μία διανυσματική συνάρτηση $\vec{r}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ η οποία, όπως αναφέραμε στο Κεφάλαιο 2, ορίζεται σε ένα διάστημα των πραγματικών αριθμών και οι τιμές της είναι σημεία του n -χώρου. Ας υποθέσουμε επιπλέον ότι όλες οι τιμές της $\vec{r}(t)$ περιέχονται στο σύνολο U . Κάτω από αυτές τις συνθήκες, μπορούμε να ορίσουμε την σύνθετη συνάρτηση $f \circ \vec{r}$ σαν πραγματική συνάρτηση του t με τη σχέση

$$(f \circ \vec{r})(t) = f(\vec{r}(t)) = f(x_1(t), \dots, x_n(t)).$$

Παράδειγμα 3.7

Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x, y) = e^x \sin(xy)$ και τη διανυσματική συνάρτηση $\vec{r}: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$, $\vec{r}(t) = (x(t), y(t)) = (t^2, t^3)$. Τότε η **σύνθετη συνάρτηση**

$$f(\vec{r}(t)) = e^{t^2} \sin(t^5)$$

είναι μία πραγματική συνάρτηση μίας μεταβλητής.

Ο κανόνας της αλυσίδας χρησιμοποιείται για να υπολογίζουμε την παράγωγο της σύνθετης συνάρτησης αν γνωρίζουμε την κλίση της f και την παράγωγο της \vec{r} .

Κανόνας αλυσίδας: Έστω f συνάρτηση ορισμένη και παραγωγίσιμη σε ανοιχτό σύνολο $U \subseteq \mathbf{R}^n$. Έστω $\vec{r}: I \subseteq \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n$ μία παραγωγίσιμη καμπύλη τέτοια ώστε όλες οι τιμές $\vec{r}(t)$ περιέχονται στο ανοιχτό σύνολο U . Τότε η συνάρτηση

$$t \rightarrow f(\vec{r}(t))$$

είναι παραγωγίσιμη (σαν συνάρτηση του t) και ισχύει:

$$\frac{df(\vec{r}(t))}{dt} = \nabla f \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{df(\vec{r}(t))}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dt}.$$

Στην περίπτωση που η f είναι συνάρτηση δύο μεταβλητών (x, y) τότε

$$\frac{df(\vec{r}(t))}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}.$$

Ο κανόνας της αλυσίδας εφαρμόζεται και σε γενικότερες περιπτώσεις όπου οι μεταβλητές της συνάρτησης f είναι επίσης συναρτήσεις περισσότερων μεταβλητών. Ας υποθέσουμε ότι οι μεταβλητές της παραγωγίσιμης συνάρτησης $f(x, y)$ είναι επίσης παραγωγίσιμες συναρτήσεις δύο μεταβλητών, δηλαδή $x = x(u, v)$ και $y = y(u, v)$. Τότε η σύνθεση των συναρτήσεων

$$g(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$$

είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση των μεταβλητών (u, v) και οι μερικές της παράγωγοι δίνονται από τις σχέσεις

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \quad \text{και} \quad \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}$$

Ένας πιο απλός τρόπος παράστασης των δύο αυτών σχέσεων δίνεται με τη βοήθεια πινάκων

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} \quad \text{ή} \quad [f_u \quad f_v] = [f_x \quad f_y] \cdot \begin{bmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{bmatrix}.$$

Η παράσταση του κανόνα της αλυσίδας με πίνακες επιτρέπει την εύκολη γενίκευση οποιασδήποτε περίπτωσης σύνθετης συνάρτησης αντιμετωπίσουμε. Έτσι, αν $f(x, y, z)$ όπου $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$ και $z = z(u, v, w)$ έχουμε

3. Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} & \frac{\partial f}{\partial w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{bmatrix}$$

ενώ αν $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ και $z = z(u, v)$ όμοια προκύπτει

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix}.$$

Παράδειγμα 3.8

Έστω $f(x, y) = x^2 + 2xy$ όπου $x = r \cos \theta$ και $y = r \sin \theta$. Η σύνθετη συνάρτηση

$$g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

έχει μερικές παραγώγους ως προς r και θ :

$$\frac{\partial g}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \quad \text{και} \quad \frac{\partial g}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta}.$$

Αλλά

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 2y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2x, \quad \frac{\partial x}{\partial r} = \cos \theta, \quad \frac{\partial y}{\partial r} = \sin \theta, \quad \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r \sin \theta, \quad \frac{\partial y}{\partial \theta} = r \cos \theta.$$

Αντικαθιστώντας, παίρνουμε:

$$\frac{\partial g}{\partial r} = (2x + 2y) \cos \theta + 2x \sin \theta \quad \text{και} \quad \frac{\partial g}{\partial \theta} = (2x + 2y)(-r \sin \theta) + 2x(r \cos \theta).$$

Βεβαίως, μπορούμε να πάρουμε τις μερικές παραγώγους σαν εκφράσεις του r και του θ , αντικαθιστώντας $x = r \cos \theta$ και $y = r \sin \theta$.

Παράδειγμα 3.9

Έστω $f(x, y, z) = e^{xy} \cos z$ όπου $x = uv$, $y = \sin(uv)$ και $z = v^2$. Τότε,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} ye^{xy} \cos z & xe^{xy} \cos z & -e^{xy} \sin z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v & u \\ v \cos(uv) & u \cos(uv) \\ 0 & 2v \end{bmatrix} \end{aligned}$$

απ' όπου προκύπτουν:

$$\frac{\partial f}{\partial u} = e^{xy} (yv \cos z + xv \cos z \cos(uv)) \quad \text{και} \quad \frac{\partial f}{\partial v} = e^{xy} (yu \cos z + xu \cos z \cos(uv) - 2v \sin z)$$

§3.4. Παράγωγος κατά κατεύθυνση

Έστω f πραγματική συνάρτηση n μεταβλητών, ορισμένη σε ένα ανοιχτό σύνολο $U \subseteq \mathbf{R}^n$ και παραγωγίσιμη. Έστω σημείο $P = (p_1, \dots, p_n) \in U$ και $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$ ένα μοναδιαίο διάνυσμα ($|\vec{a}| = 1$). Η καμπύλη

$$\vec{r}(t) = P + t\vec{a} = (p_1 + ta_1, \dots, p_n + ta_n), \quad t \in \mathbf{R}$$

είναι μία ευθεία γραμμή που περνά από το σημείο P και έχει τη διεύθυνση του διανύσματος \vec{a} . Αν πάρουμε την παράγωγο της καμπύλης, παρατηρούμε ότι

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d(P + t\vec{a})}{dt} = \left(\frac{d(p_1 + ta_1)}{dt}, \dots, \frac{d(p_n + ta_n)}{dt} \right) = (a_1, \dots, a_n) = \vec{a}.$$

Ας θεωρήσουμε τώρα τη σύνθετη συνάρτηση $t \rightarrow f(\vec{r}(t)) = f(P + t\vec{a})$ που ορίζεται για . Σύμφωνα με τον κανόνα της αλυσίδας (§3.3) η παράγωγός της είναι:

$$\frac{df(P + t\vec{a})}{dt} = \nabla f(P + t\vec{a}) \cdot \frac{d(P + t\vec{a})}{dt} = \nabla f(P + t\vec{a}) \cdot \vec{a}.$$

Αυτό που μας ενδιαφέρει να εκτιμήσουμε εδώ, είναι ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης f κατά μήκος της ευθείας γραμμής που διέρχεται από το σημείο P και έχει τη διεύθυνση του διανύσματος \vec{a} . Ο ρυθμός αυτός είναι η τιμή της προηγούμενης παραγωγού στο σημείο $t = 0$ όπου $f(P + t\vec{a}) = f(P)$.

Ονομάζουμε λοιπόν **παράγωγο κατά κατεύθυνση** (ή κατευθυνόμενη παράγωγο) της συνάρτησης f στο σημείο P προς τη διεύθυνση ενός μοναδιαίου διανύσματος \vec{a} την ποσότητα

$$D_{\vec{a}}f(P) = \frac{df}{d\vec{a}}(P) = \left. \frac{df(P+t\vec{a})}{dt} \right|_{t=0} = \nabla f(P) \cdot \vec{a}.$$

Σημείωση: Στον υπολογισμό της κατά κατεύθυνση παραγώγου από τον προηγούμενο τύπο, υποθέσαμε ότι το διάνυσμα \vec{a} είναι μοναδιαίο. Αυτό σημαίνει ότι όταν η κατεύθυνση καθορίζεται με ένα διάνυσμα το οποίο δεν είναι μοναδιαίο, τότε πρέπει να το διαιρούμε με το μήκος του πριν την εφαρμογή του τύπου.

Παράδειγμα 3.10

Δίνεται η συνάρτηση $f(x, y) = x^2 + y^3$. Θα υπολογίσουμε τον ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης στο σημείο $(-1, 3)$ κατά τη διεύθυνση του διανύσματος $\vec{b} = (1, 2)$.

Αρχικά παρατηρούμε ότι το διάνυσμα που καθορίζει την κατεύθυνση δεν είναι μοναδιαίο. Το μήκος του είναι $|\vec{b}| = \sqrt{5}$. Επομένως, για την εφαρμογή του τύπου θα

χρησιμοποιήσουμε το μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{b} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$. Επίσης έχουμε:

$$\nabla f(-1, 3) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)_{(-1, 3)} = (2x, 3y^2)_{(-1, 3)} = (-2, 27).$$

Άρα τελικά

$$D_{\vec{a}}f(-1, 3) = \nabla f(-1, 3) \cdot \vec{a} = (-2, 27) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{52}{\sqrt{5}}.$$

Ας εξετάσουμε τώρα μία άλλη εφαρμογή της κατά κατεύθυνση παραγώγου. Υποθέτουμε ότι για το σημείο $P \in U$, ισχύει $\nabla f(P) \neq (0, \dots, 0)$. Από τον ορισμό ισχύει

$$D_{\vec{a}}f(P) = \nabla f(P) \cdot \vec{a} = |\nabla f(P)| |\vec{a}| \cos \theta$$

όπου θ είναι η γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα $\nabla f(P)$ και \vec{a} . Αφού όμως $|\vec{a}| = 1$, έχουμε $D_{\vec{a}}f(P) = |\nabla f(P)| \cos \theta$. Αλλά το $\cos \theta$ παίρνει τιμές ανάμεσα στα -1 και $+1$ για όλα τα μοναδιαία διανύσματα \vec{a} που μπορούμε να επιλέξουμε. Η μέγιστη τιμή του $\cos \theta$

προκύπτει όταν $\theta = 0$, όταν δηλαδή το διάνυσμα \vec{a} έχει την ίδια διεύθυνση με το $\nabla f(P)$. Στην περίπτωση αυτή η κατά κατεύθυνση παράγωγος ισούται με το μήκος της κλίσης. Όταν το \vec{a} έχει αντίθετη κατεύθυνση από το $\nabla f(P)$, τότε $\cos\theta = -1$ και η κατά κατεύθυνση παράγωγος παίρνει την μικρότερη τιμή της. Αν θυμηθούμε τώρα ότι η κατά κατεύθυνση παράγωγος ερμηνεύεται σαν ρυθμός μεταβολής έχουμε το τελικό συμπέρασμα:

Η κατεύθυνση της $\nabla f(P)$ είναι και κατεύθυνση της μέγιστης αύξησης της συνάρτησης και το μήκος της είναι ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης προς αυτή την κατεύθυνση. Η κατεύθυνση που είναι αντίθετη της $\nabla f(P)$ είναι και κατεύθυνση της μέγιστης μείωσης της συνάρτησης.

Με πιο απλά λόγια θα μπορούσαμε να πούμε ότι αν θέλουμε να κινηθούμε προς την κατεύθυνση που η f αυξάνει πιο γρήγορα, θα πρέπει να κινηθούμε προς την κατεύθυνση $\nabla f(P)$. Αν όμως θέλουμε να κινηθούμε προς την κατεύθυνση που η f φθίνει πιο γρήγορα, θα πρέπει να κινηθούμε προς την κατεύθυνση $-\nabla f(P)$.

Παράδειγμα 3.11

Ας υποθέσουμε ότι η συνάρτηση

$$T(x, y, z) = ke^{-(x^2+y^2+z^2)}, \quad k > 0$$

παριστά τη θερμοκρασία σε κάθε σημείο (x, y, z) μίας μεταλλικής μπάλας με κέντρο την αρχή των αξόνων. Θα βρούμε σε ποια κατεύθυνση πρέπει να κινηθούμε από ένα τυχαίο σημείο $P = (x, y, z)$ έτσι ώστε να πετύχουμε (α) ταχύτερη αύξηση και (β) ταχύτερη μείωση της θερμοκρασίας.

Σύμφωνα με αυτά που αναφέραμε, πρέπει να υπολογίσουμε την κλίση της συνάρτησης θερμοκρασίας στο τυχαίο σημείο. Έχουμε

$$\nabla T(P) = \left(\frac{\partial T}{\partial x}(P), \frac{\partial T}{\partial y}(P), \frac{\partial T}{\partial z}(P) \right) = -2ke^{-(x^2+y^2+z^2)}(x, y, z) = -2T(P)\vec{p}$$

όπου με \vec{p} συμβολίζουμε το διάνυσμα θέσης του σημείου P . Το \vec{p} έχει κατεύθυνση από το κέντρο της σφαίρας προς το σημείο P . Αλλά αφού πρέπει να κινηθούμε προς την κατεύθυνση του διανύσματος κλίσης έτσι ώστε να ακολουθήσουμε την ταχύτερη αύξηση της θερμοκρασίας, αυτό επιτυγχάνεται αν κινηθούμε προς το κέντρο της σφαίρας. Αντίθετα, αν θελήσουμε να ακολουθήσουμε την ταχύτερη μείωση της θερμοκρασίας, πρέπει να κινηθούμε στην αντίθετη κατεύθυνση, απομακρυνόμενοι από το κέντρο της σφαίρας.

Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι οι μερικές παράγωγοι της συνάρτησης f μπορούν να θεωρηθούν σαν ειδικές περιπτώσεις της κατευθυνόμενης παραγώγου. Πράγματι, αν το μοναδιαίο διάνυσμα στον ορισμό που αναφέραμε είναι το $\vec{E}_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$, όπου το 1 βρίσκεται στην i -στή θέση, τότε

$$\frac{df}{d\vec{E}_i}(P) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_i}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \cdot (0, \dots, 1, \dots, 0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Δηλαδή η κατευθυνόμενη παράγωγος της f προς την κατεύθυνση του i -στού άξονα του συστήματος συντεταγμένων είναι η μερική παράγωγος ως προς την αντίστοιχη μεταβλητή.

§3.4. Μερικές παράγωγοι ανώτερης τάξης

Έστω f μία συνάρτηση δύο μεταβλητών, ορισμένη σε ένα ανοιχτό σύνολο $U \subseteq \mathbf{R}^2$. Υποθέτουμε ακόμη ότι υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης και είναι συνεχείς.

Αυτό σημαίνει ότι οι $\frac{\partial f}{\partial x}$ και $\frac{\partial f}{\partial y}$ είναι επίσης συναρτήσεις δύο μεταβλητών ορισμένες στο

U και επομένως είναι λογικό να αναζητήσουμε τις μερικές τους παραγώγους ως προς x και y . Με τον τρόπο αυτόν, ορίζονται οι **μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης**:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right).$$

Οι δύο τελευταίες ονομάζονται **μεικτές μερικές παράγωγοι**. Αποδεικνύεται ότι για τις συναρτήσεις που έχουν συνεχείς πρώτης τάξης μερικές παραγώγους, οι μεικτές μερικές παράγωγοι είναι ίσες. Έτσι για όλες τις συναρτήσεις που συναντάμε στην πράξη,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Αν θεωρήσουμε τώρα μία συνάρτηση f τριών μεταβλητών και ας υποθέσουμε ότι οι μερικές παράγωγοι της υπάρχουν και είναι συνεχείς. Από αυτές, παραγωγίζοντας πάλι ως προς x , y και z παίρνουμε εννέα μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης, τις

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

3. Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

και τις μεικτές

$$\frac{\partial f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial f}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial f}{\partial z \partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial f}{\partial z \partial y}.$$

Γενικά, μπορούμε να σχηματίσουμε μερικές παραγώγους οποιασδήποτε τάξης ν , οποιασδήποτε συνάρτησης (αρκεί βέβαια να έχει συνεχείς μερικές παραγώγους τάξη μέχρι $\nu-1$). Η σειρά της παραγωγίσης δεν έχει σημασία για τις μεικτές παραγώγους. Για παράδειγμα, αν $w = f(x, y, z)$,

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial z \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial z} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial z \partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial z \partial x \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial z \partial y \partial x}.$$

Παράδειγμα 3.12

Θα βρούμε τις μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης της $f(x, y, z) = e^{xy} + z \cos x$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = ye^{xy} - z \sin x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = xe^{xy}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \cos x,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(ye^{xy} - z \sin x) = y^2 e^{xy} - z \cos x,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(xe^{xy}) = x^2 e^{xy},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z}(\cos x) = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(xe^{xy}) = \frac{\partial f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(ye^{xy} - z \sin x) = e^{xy}(xy + 1),$$

$$\frac{\partial f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial f}{\partial x}(\cos x) = \frac{\partial f}{\partial z \partial x} = \frac{\partial f}{\partial z}(ye^{xy} - z \sin x) = -\sin x,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial f}{\partial y}(\cos x) = \frac{\partial f}{\partial z \partial y} = \frac{\partial f}{\partial z}(xe^{xy}) = 0.$$

Μία συνάρτηση τριών μεταβλητών $f(x, y, z)$ λέγεται ότι ικανοποιεί την **εξίσωση του Laplace** αν ισχύει:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0.$$

Παράδειγμα 3.13

Η συνάρτηση $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2z^2$ ικανοποιεί την **εξίσωση του Laplace** γιατί:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= 2x, & \frac{\partial f}{\partial y} &= 2y, & \frac{\partial f}{\partial z} &= -4z, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= 2, & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= 2, & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} &= -4,\end{aligned}$$

οπότε

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 2 + 2 - 4 = 0.$$

§3.4. Μερικοί διαφορικοί τελεστές

Θα αρχίσουμε τη συζήτηση για τους διαφορικούς τελεστές από τις συναρτήσεις μίας μεταβλητής x . Φυσικά, τότε έχουμε μόνο ένα τύπο παραγώγου, την

$$D = \frac{d}{dx}.$$

Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι η f είναι συνάρτηση μίας μεταβλητής και ότι υπάρχουν όλες οι πολλαπλές παράγωγοι της f . Έστω επίσης m ένας θετικός ακέραιος. Η παράγωγος τάξης m της f συμβολίζεται με $f^{(m)}$ και σημαίνει ότι η παραγωγή της f επαναλαμβάνεται m φορές στη συνέχεια, δηλαδή

$$DD \cdots Df \quad \text{ή} \quad \frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dx} \cdots \left(\frac{df}{dx} \right) \cdots \right).$$

Ένας βολικός τρόπος για να παραστήσουμε αυτή την «πράξη» είναι

$$D^m f \quad \text{ή} \quad \left(\frac{d}{dx} \right)^m f.$$

Η έκφραση $D^m = \left(\frac{d}{dx} \right)^m$ ονομάζεται **απλός διαφορικός τελεστής τάξης m** . Για την πληρότητα του ορισμού δεχόμαστε ότι $D^0 f = f$. Μπορούμε λοιπόν να δούμε εύκολα ότι ισχύει για ακέραιους $m, n \geq 0$:

$$D^m D^n f = \left(\frac{d}{dx} \right)^m \left(\frac{d}{dx} \right)^n f = \left(\frac{d}{dx} \right)^{m+n} f = D^{m+n} f.$$

Αν επεκταθούμε τώρα στις συναρτήσεις δύο μεταβλητών $f(x, y)$, συμβολίζουμε με

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^{m_1} \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^{m_2} f$$

την «πράξη» της μερικής παραγωγίσιμης της f ως προς x m_1 φορές και ως προς y m_2 φορές (με οποιαδήποτε σειρά, εφόσον υποθέτουμε ότι υπάρχουν όλες οι πολλαπλές μερικές παράγωγοι και είναι συνεχείς). Η έκφραση της μορφής

$$D_1^{m_1} D_2^{m_2} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^{m_1} \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^{m_2}$$

ονομάζεται **απλός (μερικός) διαφορικός τελεστής τάξης $m_1 + m_2$** .

Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να προχωρήσουμε και σε συναρτήσεις περισσότερων μεταβλητών. Υποθέτουμε δηλαδή ότι η f είναι συνάρτηση n μεταβλητών και ότι υπάρχουν και είναι συνεχείς όλες οι πολλαπλές μερικές παράγωγοι της. Ορίζουμε τότε σαν **απλό (μερικό) διαφορικό τελεστή τάξης $m_1 + \dots + m_n$** μία έκφραση της μορφής

$$D_1^{m_1} \dots D_n^{m_n} \quad \text{ή} \quad \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{m_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{m_n},$$

όπου m_1, \dots, m_n είναι ακέραιοι ≥ 0 . Μερικές φορές για απλούστερη παρουσίαση, συμβολίζουμε τον παραπάνω διαφορικό τελεστή

$$D = \frac{\partial^{m_1 + \dots + m_n}}{\partial x_1^{m_1} \dots \partial x_n^{m_n}}.$$

Παράδειγμα 3.14

Αν θεωρήσουμε συναρτήσεις τριών μεταβλητών (x, y, z) , τότε η έκφραση

$$D = D_1^3 D_2^5 D_3^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^3 \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^5 \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^2$$

είναι ένας απλός διαφορικός τελεστής τάξης $3 + 5 + 2 = 10$. Αν f η συνάρτηση που ικανοποιεί τις υποθέσεις σχετικά με ύπαρξη και συνέχεια όλων των τάξεων μερικών παραγώγων, ο υπολογισμός της Df περιλαμβάνει την εύρεση της μερικής παραγώγου της f

3. Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

ως προς z δύο φορές, της μερικής παραγώγου της f ως προς y πέντε φορές και της μερικής παραγώγου της f ως προς x τρεις φορές. Το αποτέλεσμα βέβαια της εφαρμογής του τελεστή που θα μπορούσε να γραφεί με τη μορφή

$$D = \frac{\partial^{10}}{\partial x^3 \partial y^5 \partial z^2}$$

είναι μία άλλη συνάρτηση τριών μεταβλητών.

Σημείωση: Η χρήση των διαφορικών τελεστών πρέπει να γίνεται με προσοχή λόγω της ομοιότητας στον συμβολισμό με τις δυνάμεις. Για παράδειγμα, δεν πρέπει να συγχέονται οι εκφράσεις

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad \text{και} \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2.$$

Θα δούμε τώρα πως από πολλούς απλούς διαφορικούς τελεστές της μορφής που περιγράψαμε, μπορούμε να σχηματίσουμε τον γραμμικό συνδυασμό τους (αθροίσματα και γινόμενα με αριθμούς) και να προκύψουν με αυτόν τον τρόπο οι **διαφορικοί τελεστές** με τη γενικότερη σημασία.

Παράδειγμα 3.15

Ας θεωρήσουμε συναρτήσεις δύο μεταβλητών (x, y) και τους απλούς διαφορικούς τελεστές:

$$D_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad D_1^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2, \quad D_1 D_2 = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$$

τότε η έκφραση

$$D = 3D_1 + 5D_1^2 - \pi D_1 D_2$$

είναι ένας διαφορικός τελεστής. Έστω η συνάρτηση $f(x, y) = \sin(xy)$. Θα εφαρμόσουμε τον διαφορικό τελεστή επάνω της, θα υπολογίσουμε δηλαδή τη συνάρτηση Df .

$$Df(x, y) = 3 \frac{\partial f}{\partial x} + 5 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \pi \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 3y \cos(xy) + 5(-y^2 \sin(xy)) - \pi [\cos(xy) - xy \sin(xy)].$$

Παράδειγμα 3.16

Αν θεωρήσουμε συναρτήσεις τριών μεταβλητών (x, y, z) και τους απλούς διαφορικούς τελεστές

$$D_1^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2, \quad D_2^2 = \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2, \quad D_3^2 = \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^2$$

τότε ο διαφορικός τελεστής $D_1^2 + D_2^2 + D_3^2$ ονομάζεται **τελεστής Laplace** και συμβολίζεται:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Η εξίσωση Laplace λοιπόν που αναφέραμε στην §3.3, γίνεται με τη βοήθεια του τελεστή:

$$\nabla^2 f = 0$$

Ιδιότητες διαφορικών τελεστών

- Για οποιονδήποτε διαφορικό τελεστή D , αν $c \in \mathbf{R}$ ισχύει:

$$D(cf) = cDf$$

- Αν f και g δύο συναρτήσεις ορισμένες στο ίδιο ανοιχτό σύνολο με συνεχείς μερικές παραγώγους όλων των τάξεων, και D οποιοσδήποτε διαφορικός τελεστής, ισχύει:

$$D(f + g) = Df + Dg$$

- Για δύο οποιουδήποτε διαφορικούς τελεστές D και D' ορίζουμε το **άθροισμά** τους

$$(D + D')f = Df + D'f$$

- Ορίζουμε σαν **γινόμενο** δύο διαφορικών τελεστών D και D' τον διαφορικό τελεστή DD' για τον οποίο ισχύει:

$$(DD')f = D(D'f)$$

Αυτό σημαίνει ότι πρώτα εφαρμόζεται ο τελεστής D' στη συνάρτηση και στη συνέχεια στο αποτέλεσμα εφαρμόζεται ο D .

- Η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός των διαφορικών τελεστών ικανοποιούν όλους τους κανόνες που γνωρίζουμε για την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό των πολυωνύμων.

Για παράδειγμα, ισχύουν οι σχέσεις

$$DD' = D'D \quad \text{και} \quad D(D' + D'') = DD' + DD''$$

Όταν ένας διαφορικός τελεστής έχει τη μορφή αθροίσματος όρων του τύπου

$$cD_1^{m_1} \dots D_n^{m_n}$$

λέμε ότι είναι σε **κανονική μορφή**. Κάθε τέτοιος όρος έχει **βαθμό** $m_1 + \dots + m_n$. Αν όλοι οι όροι του αθροίσματος έχουν τον ίδιο βαθμό m , τότε ο διαφορικός τελεστής ονομάζεται **ομογενής βαθμού m** .

Παράδειγμα 3.17

Έστω οι διαφορικοί τελεστές

$$D = 3\frac{\partial}{\partial x} + 2\frac{\partial}{\partial y} \quad \text{και} \quad D' = \frac{\partial}{\partial x} + 4\frac{\partial}{\partial y}.$$

Το γινόμενο τους θα είναι:

$$DD' = \left(3\frac{\partial}{\partial x} + 2\frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} + 4\frac{\partial}{\partial y} \right) = 3\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + 14\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) + 8\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2$$

Παρατηρούμε ότι το γινόμενο των δύο τελεστών που είναι ένας νέος διαφορικός τελεστής έχει εκφραστεί σε κανονική μορφή. Βλέπουμε επίσης ότι είναι και ομογενής βαθμού 2. Η αρχική έκφραση του τελεστή

$$\left(3\frac{\partial}{\partial x} + 2\frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} + 4\frac{\partial}{\partial y} \right)$$

δεν είναι σε κανονική μορφή.

Παράδειγμα 3.18

Έστω η συνάρτηση $f(x, y) = x^i y^j$ όπου $i, j \geq 0$ ακέραιοι αριθμοί. Τότε, ισχύει:

$$D_1^i D_2^j f(x, y) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^i \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^j f(x, y) = i! j!$$

Η απόδειξη είναι άμεση, αφού το x^i παραγωγίζεται i φορές ως προς x και χάνει σταδιακά τις δυνάμεις του όπως και το y^j που παραγωγίζεται j φορές ως προς y .

Αν τώρα r και s είναι ακέραιοι ≥ 0 , τέτοιοι ώστε $r \neq i$ και $s \neq j$ τότε

$$D_1^r D_2^s f(0,0) = 0.$$

Παράδειγμα 3.19 – Τύπος του Taylor

Στη θεωρία των συναρτήσεων μίας μεταβλητής $f(x)$ γνωρίζουμε έναν τρόπο με τον οποίον μπορούμε να προσεγγίσουμε τιμές της συνάρτησης κοντά σε ένα δεδομένο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού. Η προσέγγιση αυτή γίνεται με τα λεγόμενα **πολυώνυμα Taylor m βαθμού**:

$$f(x) \approx p_m(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x - x_0)^m.$$

3. Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

Σε πολλές περιπτώσεις μας ενδιαφέρει να μελετήσουμε τα πολυώνυμα αυτά στην περιοχή του μηδενός οπότε για $x_0 = 0$ το πολυώνυμο γίνεται:

$$p_m(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(m)}(0)}{m!}x^m$$

Η ιδέα της προσέγγισης μίας συνάρτησης από πολυώνυμο μπορεί να επεκταθεί και στις συναρτήσεις πολλών μεταβλητών. Ειδικά για τις συναρτήσεις $f(x, y)$ στην περιοχή του $O = (0, 0)$ ο αντίστοιχος τύπος του Taylor είναι:

$$f(x, y) \approx p_m(x, y) = \sum_{i+j \leq m} \frac{D_1^i D_2^j f(0, 0)}{i! j!} x^i y^j = \sum_{i+j \leq m} \frac{1}{i! j!} \frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j} f(0, 0) x^i y^j$$

όπου ο μετρητής στο σύμβολο του αθροίσματος σημαίνει ότι θα πρέπει να πάρουμε όλους τους δυνατούς συνδυασμούς για τα i και j έτσι ώστε πάντοτε να είναι $i + j \leq m$. Αν $i = j = 0$, τότε γράφουμε $D_1^0 D_2^0 f(0, 0) = f(0, 0)$

Αν λοιπόν για παράδειγμα έχουμε την συνάρτηση

$$f(x, y) = \ln(1 + x + 2y)$$

και θέλουμε να βρούμε το πολυώνυμο βαθμού 2 που προσεγγίζει τη συνάρτηση στο $O = (0, 0)$ θα έχουμε:

$$f(0, 0) = 0,$$

$$D_1 f(x, y) = \frac{1}{1 + x + 2y}, \quad D_1 f(0, 0) = 1$$

$$D_2 f(x, y) = \frac{2}{1 + x + 2y}, \quad D_2 f(0, 0) = 2$$

$$D_1^2 f(x, y) = -\frac{1}{(1 + x + 2y)^2}, \quad D_1^2 f(0, 0) = -1$$

$$D_2^2 f(x, y) = -\frac{4}{(1 + x + 2y)^2}, \quad D_2^2 f(0, 0) = -4$$

$$D_1 D_2 f(x, y) = -\frac{2}{(1 + x + 2y)^2}, \quad D_1 D_2 f(0, 0) = -2$$

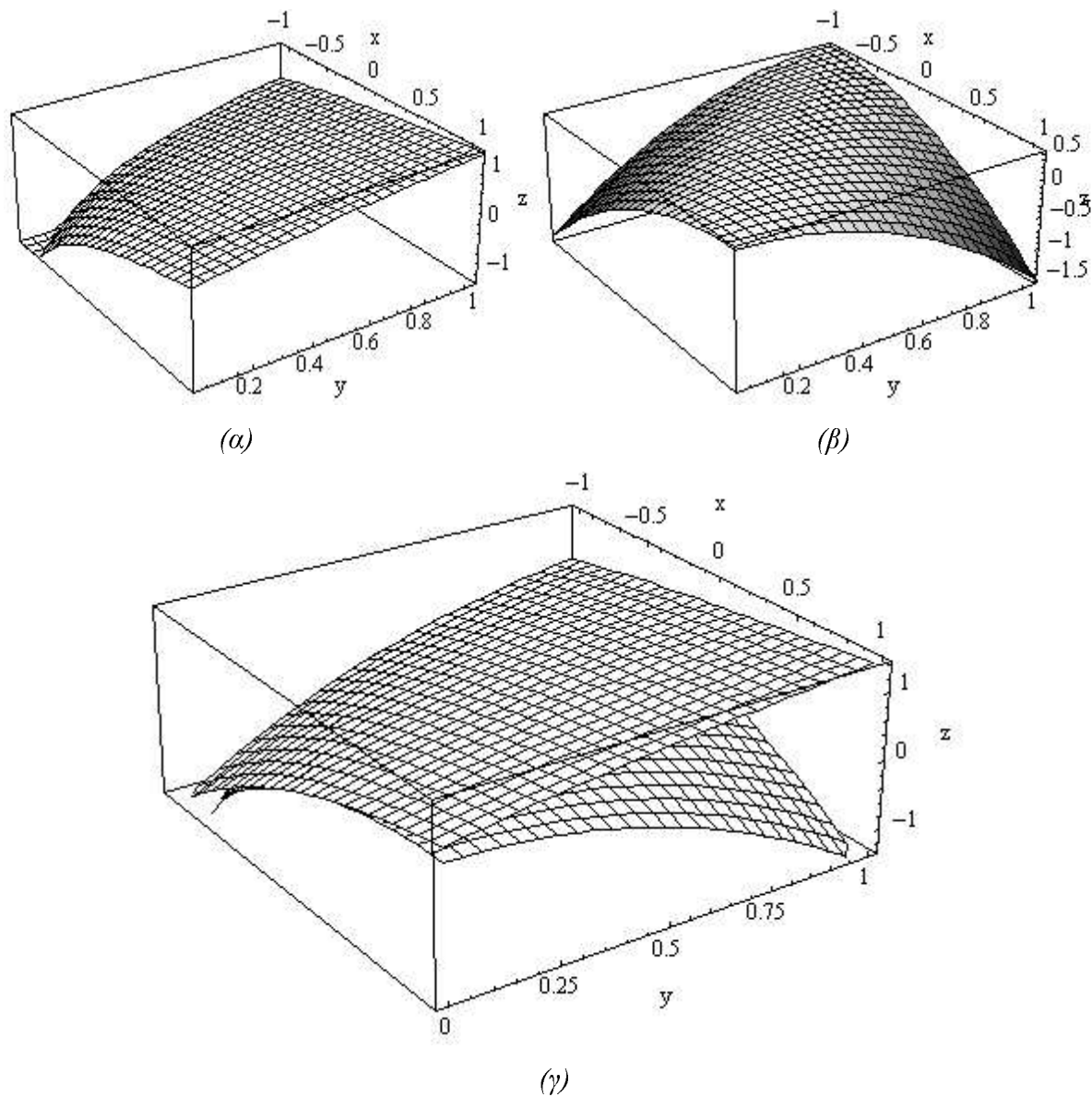
Άρα,

$$p_2(x, y) = f(0, 0) + D_1 f(0, 0)x + D_2 f(0, 0)y + \frac{D_1^2 f(0, 0)}{2}x^2 + \frac{D_2^2 f(0, 0)}{2}y^2 + \frac{D_1 D_2 f(0, 0)}{1 \cdot 1}xy$$

και μετά την αντικατάσταση

$$p_2(x, y) = x + 2y - \frac{1}{2}x^2 - 2y^2 - 2xy.$$

Στο Σχήμα 3.5, στο (α) βλέπουμε την $f(x, y)$, στο (β) την $p_2(x, y)$ και στο (γ) και τις δύο μαζί (επάνω είναι η $f(x, y)$). Φαίνεται η προσέγγισή τους στην περιοχή του $(0, 0)$.



Σχήμα 3.5: Προσέγγιση επιφάνειας από πολυώνυμο Taylor

§3.5. Ελάχιστα και μέγιστα

Στη μελέτη των συναρτήσεων μίας μεταβλητής, χρησιμοποιήσαμε τις παραγώγους για να εντοπίσουμε τα τοπικά ακρότατα μίας συνάρτησης, δηλαδή τα σημεία όπου η συνάρτηση παίρνει τις ελάχιστες ή τις μέγιστες τιμές της σε σχέση πάντοτε με τα γειτονικά σημεία. Το πρώτο βήμα της μεθόδου εντοπισμού των ακρότατων σημείων ήταν η εύρεση των κρίσιμων σημείων, δηλαδή αυτών όπου η πρώτη παράγωγος είναι ίση με μηδέν. Στη συνέχεια, εξετάζαμε το πρόσημο της δεύτερης παραγώγου για να αποφασίσουμε αν έχουμε ελάχιστο ή μέγιστο. Η μέθοδος αυτή μπορεί να γενικευτεί και στην περίπτωση των συναρτήσεων πολλών μεταβλητών, όπου χρησιμοποιούμε πλέον τις μερικές παραγώγους.

Έστω $f: U \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$, παραγωγίσιμη συνάρτηση όπου το U είναι ένα ανοιχτό σύνολο. Έστω επίσης σημείο $P = (p_1, \dots, p_n) \in U$. Το P ονομάζεται **τοπικό μέγιστο** της συνάρτησης αν υπάρχει μία ανοιχτή μπάλα B με κέντρο το P τέτοια ώστε για όλα τα σημεία $X = (x_1, \dots, x_n) \in B$ να ισχύει

$$f(X) \leq f(P) \quad \text{ή αλλιώς} \quad f(x_1, \dots, x_n) \leq f(p_1, \dots, p_n).$$

Όμοια, το P ονομάζεται **τοπικό ελάχιστο** της συνάρτησης αν υπάρχει μία ανοιχτή μπάλα B με κέντρο το P τέτοια ώστε για όλα τα σημεία $X = (x_1, \dots, x_n) \in B$ να ισχύει

$$f(X) \geq f(P) \quad \text{ή αλλιώς} \quad f(x_1, \dots, x_n) \geq f(p_1, \dots, p_n).$$

Αν το σημείο P είναι τοπικό μέγιστο ή τοπικό ελάχιστο, τότε λέγεται **τοπικό ακρότατο**.

Το σημείο P ονομάζεται **κρίσιμο σημείο** της συνάρτησης f αν όλες οι μερικές παράγωγοι της f μηδενίζονται στο P . Δηλαδή, το P είναι κρίσιμο σημείο αν

$$D_1 f(P) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(p_1, \dots, p_n) = 0, \dots, D_n f(P) = \frac{\partial f}{\partial x_n}(p_1, \dots, p_n) = 0,$$

ή ισοδύναμα αν ισχύει

$$\nabla f(P) = (0, \dots, 0).$$

Αποδεικνύεται ότι αν το σημείο P είναι τοπικό ακρότατο της συνάρτησης, τότε είναι και κρίσιμο σημείο. Η σημαντική αυτή ιδιότητα μας δίνει την ευκαιρία να αναζητήσουμε

πιθανά τοπικά ακρότατα στα σημεία όπου μηδενίζονται οι μερικές παράγωγοι. Τα σημεία τα οποία είναι κρίσιμα αλλά δεν είναι τοπικά ακρότατα ονομάζονται **σαγματικά σημεία**.

Παράδειγμα 3.20

Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση δύο μεταβλητών $f(x, y) = x^2 + y^2$. Για να βρούμε τα κρίσιμα σημεία της θα λύσουμε το σύστημα των εξισώσεων

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y = 0$$

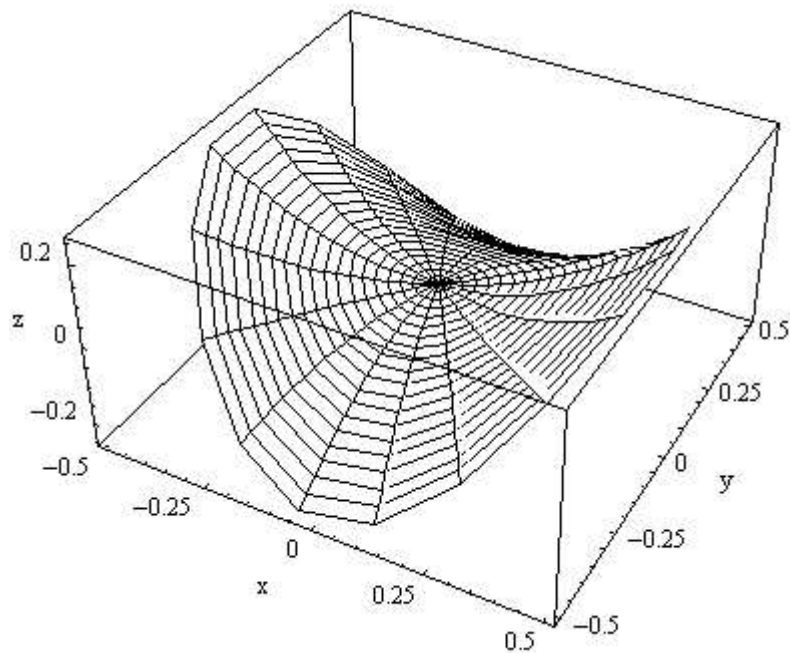
ως προς x και y . Προφανώς, το μοναδικό κρίσιμο σημείο είναι η αρχή των αξόνων $(0,0)$ όπου η τιμή της συνάρτησης είναι μηδέν. Αλλά $f(x, y) \geq 0$, οπότε το $(0,0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της συνάρτησης (είναι και ολικό ελάχιστο). Στο Σχήμα 3.2 (Παράδειγμα 3.1) φαίνεται καθαρά ότι το παραβολοειδές έχει ελάχιστη τιμή στο $(0,0)$.

Παράδειγμα 3.21

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x, y) = x^2 - y^2$. Για να βρούμε τα κρίσιμα σημεία της θα λύσουμε το σύστημα των εξισώσεων

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y = 0$$

ως προς x και y . Το μοναδικό κρίσιμο σημείο είναι και εδώ η αρχή των αξόνων $(0,0)$ όπου $f(0,0) = 0$. Αν εξετάσουμε προσεκτικά τις τιμές της συνάρτησης γύρω από το $(0,0)$ θα δούμε ότι $f(x,0) = x^2 \geq 0$ και $f(0,y) = -y^2 \leq 0$. Οποιονδήποτε λοιπόν ανοιχτό δίσκο και αν πάρουμε με κέντρο το $(0,0)$, θα έχουμε πάντοτε τιμές της συνάρτησης που άλλες θα είναι μικρότερες και άλλες μεγαλύτερες από 0. Το σημείο $(0,0)$ είναι λοιπόν σαγματικό σημείο. Στο Σχήμα 3.6 βλέπουμε τη συμπεριφορά της συνάρτησης γύρω από την αρχή των αξόνων. Η επιφάνεια θυμίζει σάγμα (σαμάρι) και παρατηρούμε ότι σε άλλες κατευθύνσεις (αρχίζοντας από το $(0,0)$) η συνάρτηση αυξάνει ενώ σε άλλες φθίνει. Επιπλέον, η συνάρτηση δεν έχει κανένα τοπικό ακρότατο.



Σχήμα 3.6: Σαγματικό σημείο συνάρτησης

Αφού εντοπίσουμε τα κρίσιμα σημεία μίας συνάρτησης, χρειαζόμαστε κάποιο κριτήριο για να αποφασίζουμε αν αυτά είναι τοπικά ακρότατα και αν συμβαίνει αυτό, τι είδους ακρότατα έχουμε (μέγιστο ή ελάχιστο). Στις συναρτήσεις μίας μεταβλητής το κριτήριο είναι η δεύτερη παράγωγος ($f''(x) > 0$ για το τοπικό ελάχιστο και $f''(x) < 0$ για το μέγιστο). Στις συναρτήσεις περισσότερων μεταβλητών η έννοια της δεύτερης παραγώγου είναι αρκετά σύνθετη. Στη συνέχεια θα επεκτείνουμε την έννοια της δεύτερης παραγώγου με μία έκφραση που περιλαμβάνει όλες τις μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης μίας συνάρτησης $n > 1$ μεταβλητών.

Ονομάζουμε **τετραγωνική μορφή** ή **τετραγωνική συνάρτηση** μία συνάρτηση $q: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ της μορφής

$$q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j .$$

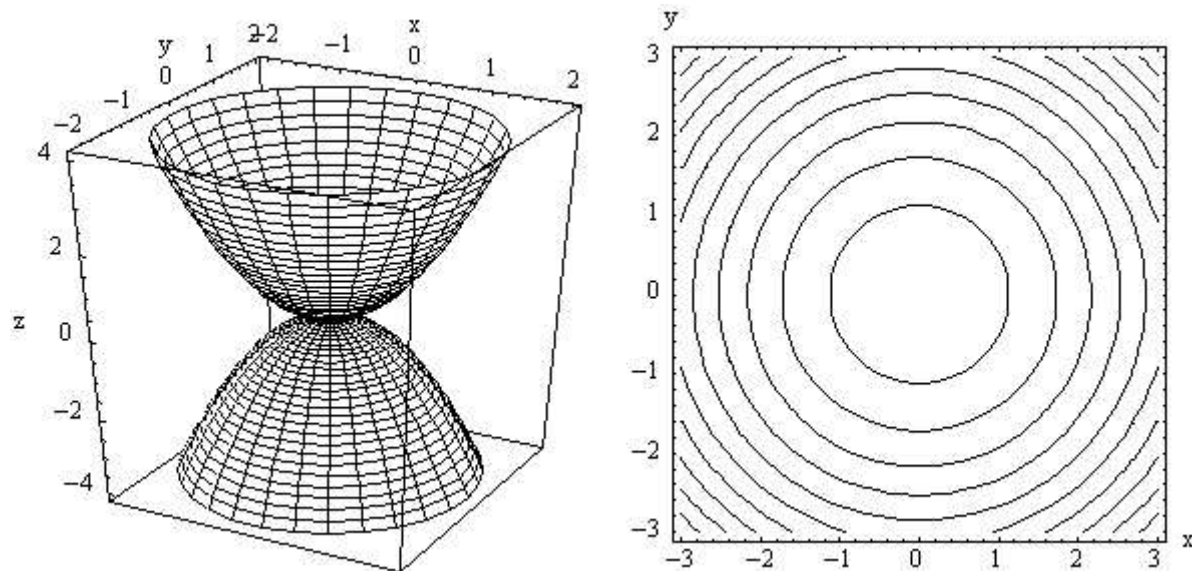
Δηλαδή, η τετραγωνική μορφή είναι ένας γραμμικός συνδυασμός όρων που είτε είναι τετραγωνικές δυνάμεις μίας μεταβλητής είτε είναι γινόμενο δύο μεταβλητών.

Παράδειγμα 3.22

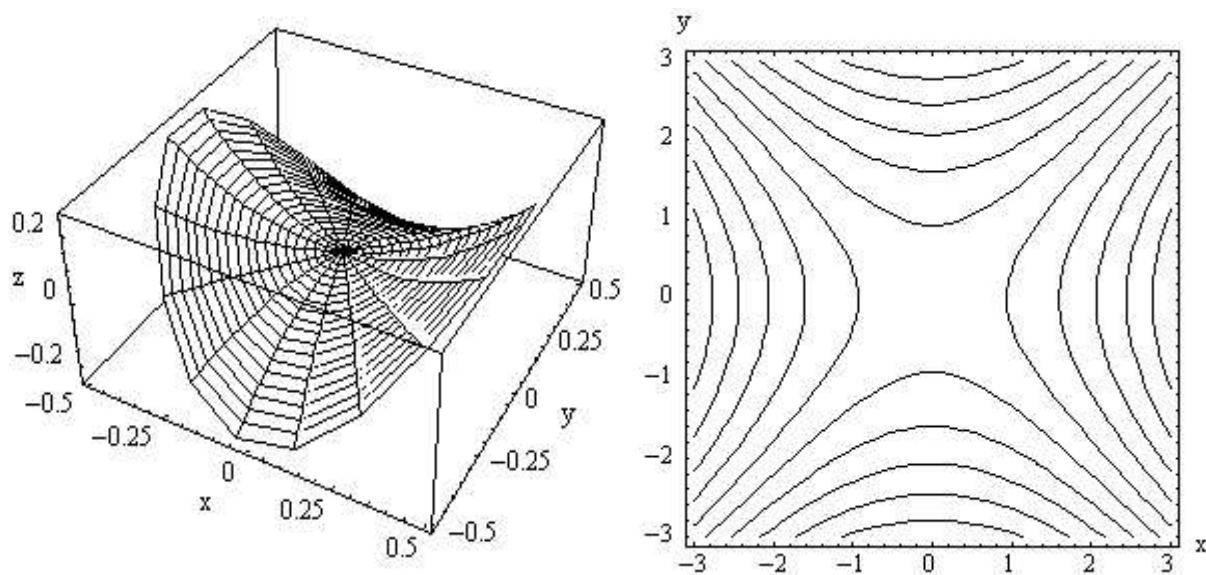
Στην περίπτωση των τετραγωνικών μορφών δύο μεταβλητών έχουμε συναρτήσεις του τύπου

$$q(x, y) = a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2.$$

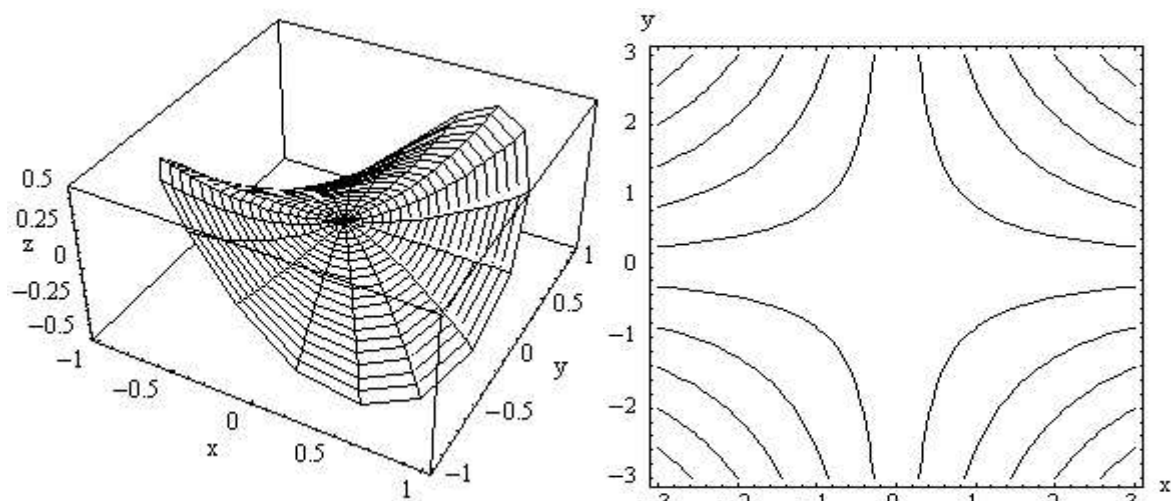
Μερικές τέτοιες επιφάνειες μαζί με τις αντίστοιχες καμπύλες στάθμης μπορούμε να δούμε στο Σχήμα 3.7.



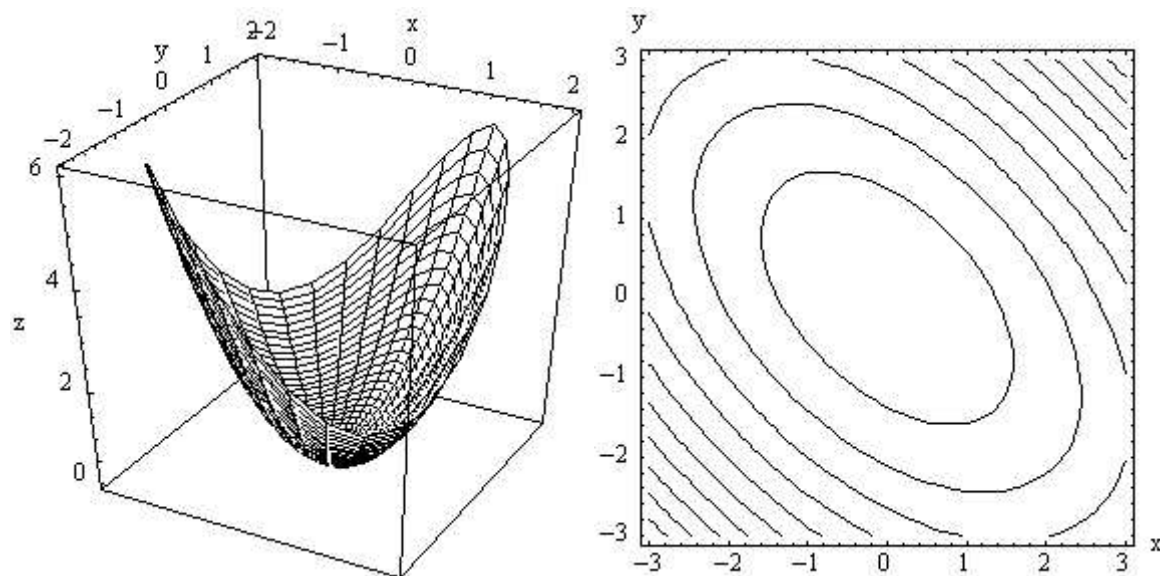
(α) $q(x, y) = x^2 + y^2$ και $q(x, y) = -(x^2 + y^2)$ στο ίδιο γράφημα.



(β) $q(x, y) = x^2 - y^2$



(γ) $q(x, y) = xy$



(δ) $q(x, y) = x^2 + y^2 + xy$

Σχήμα 3.7: Τετραγωνικές μορφές δύο μεταβλητών

Έστω η συνάρτηση $f: U \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ για την οποία υπάρχουν όλες οι μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης σε ένα σημείο $P = (p_1, \dots, p_n) \in U$. Ονομάζουμε **Εσσιανή της f στο σημείο P** (από το όνομα του L. O. Hesse), την τετραγωνική μορφή που ορίζεται:

$$Hf_P(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(P) x_i x_j.$$

Η Εσσιανή είναι ο όρος βαθμού 2 στο ανάπτυγμα Taylor της συνάρτησης στο συγκεκριμένο σημείο. Χρησιμοποιείται στα κρίσιμα σημεία, όπου ο όρος βαθμού 1 μηδενίζεται, γιατί προσεγγίζει τις τιμές της f και μας δίνει μία γενική εικόνα της συμπεριφοράς της f κοντά στα σημεία αυτά. Αν $n=2$, η Εσσιανή μίας συνάρτησης $f(x, y)$ στο σημείο $P=(a, b)$ είναι:

$$Hf_P(x, y) = \frac{1}{2} (x^2 D_1^2 f(P) + 2xy D_1 D_2 f(P) + y^2 D_2^2 f(P))$$

Παράδειγμα 3.23

Θα βρούμε την Εσσιανή της συνάρτησης $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$ στα κρίσιμα σημεία της. Από το σύστημα των εξισώσεων

$$D_1 f = \frac{\partial f}{\partial x} = -2xe^{-(x^2+y^2)} = 0 \quad \text{και} \quad D_2 f = \frac{\partial f}{\partial y} = -2ye^{-(x^2+y^2)} = 0$$

διαπιστώνουμε ότι το μόνο κρίσιμο σημείο είναι το $O=(0,0)$ όπου $f(O)=1$. Στο σημείο αυτό υπολογίζουμε τις μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης:

$$D_1^2 f(O) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(O) = (4x^2 - 2)e^{-(x^2+y^2)} \Big|_{(0,0)} = -2,$$

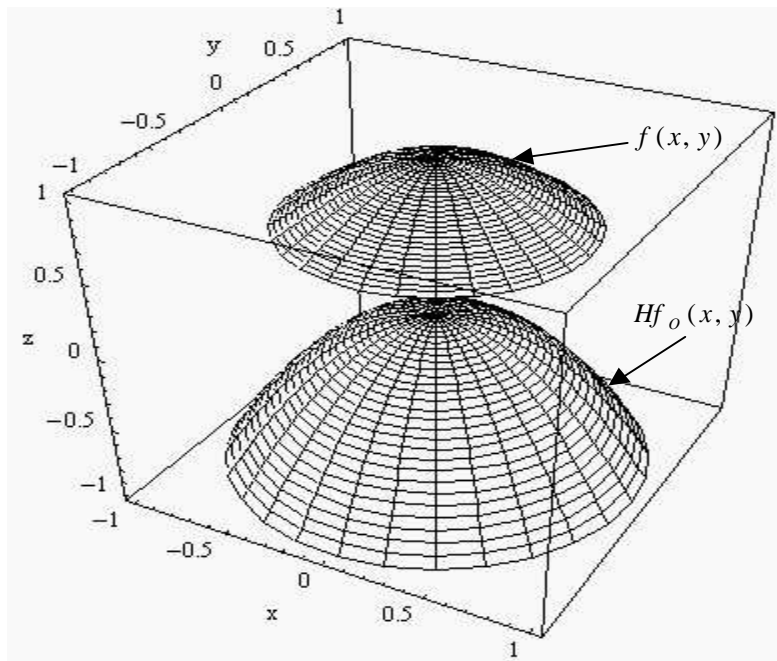
$$D_1 D_2 f(O) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(O) = 4xye^{-(x^2+y^2)} \Big|_{(0,0)} = 0$$

$$D_2^2 f(O) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(O) = (4y^2 - 2)e^{-(x^2+y^2)} \Big|_{(0,0)} = -2$$

Επομένως η Εσσιανή της f στο σημείο O είναι

$$Hf_O(x, y) = \frac{1}{2} (-2x^2 + 0xy - 2y^2) = -(x^2 + y^2).$$

Στο Σχήμα 3.8 βλέπουμε τις επιφάνειες που αντιστοιχούν στις συναρτήσεις $f(x, y)$ και $Hf_O(x, y)$. Παρατηρήστε τη συμπεριφορά της κάθε μίας στην περιοχή του $(0,0)$.



Σχήμα 3.8: Η συνάρτηση $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$ και η Εσσιανή της στο κρίσιμο σημείο

Μια τετραγωνική μορφή $q: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ λέγεται **θετικά ορισμένη** αν $q(x_1, \dots, x_n) \geq 0$ $\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ και $q(x_1, \dots, x_n) = 0$ μόνο αν $(x_1, \dots, x_n) = (0, \dots, 0)$. Όμοια, η q λέγεται **αρνητικά ορισμένη** αν $q(x_1, \dots, x_n) \leq 0$ $\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ και $q(x_1, \dots, x_n) = 0$ μόνο αν $(x_1, \dots, x_n) = (0, \dots, 0)$.

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι αν $n=1$, η Εσσιανή μίας συνάρτησης $f(x)$ σε συγκεκριμένο σημείο $x=a$ είναι

$$Hf_a(x) = \frac{1}{2} f''(a) x^2.$$

Αυτή είναι θετικά ορισμένη αν $f''(a) > 0$ και αρνητικά ορισμένη αν $f''(a) < 0$. Αλλά στις περιπτώσεις αυτές έχουμε στο κρίσιμο σημείο $x=a$ τοπικό ελάχιστο ή μέγιστο αντίστοιχα. Αυτή η παρατήρηση είναι πολύ σημαντική για την κατανόηση της παρακάτω πρότασης που ουσιαστικά θεωρεί την Εσσιανή σαν επέκταση της δεύτερης παραγώγου:

Αν η συνάρτηση $f: U \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ έχει συνεχείς μερικές παραγώγους μέχρι και δεύτερης τάξης, το σημείο $P = (p_1, \dots, p_n) \in U$ είναι ένα κρίσιμο σημείο της f και η Εσσιανή $Hf_P(x)$ είναι θετικά ορισμένη, τότε το P είναι τοπικό ελάχιστο της f . Αν η $Hf_P(x)$ είναι αρνητικά ορισμένη, τότε το P είναι τοπικό μέγιστο.

Βλέπουμε λοιπόν την αντιστοιχία που υπάρχει όχι μόνο ανάμεσα στην δεύτερη παράγωγο των συναρτήσεων μίας μεταβλητής με την Εσσιανή, αλλά και στο θετικό ή αρνητικό πρόσημο της δεύτερης παραγώγου με την έννοια της θετικά ή αρνητικά ορισμένης τετραγωνικής μορφής.

Παράδειγμα 3.24

Ας θεωρήσουμε και πάλι τη συνάρτηση $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$ που, όπως είδαμε στο Παράδειγμα 3.23, έχει ένα μόνο κρίσιμο σημείο, το $O = (0,0)$ και Εσσιανή στο σημείο αυτό

$$Hf_O(x, y) = -(x^2 + y^2).$$

Προφανώς, σύμφωνα με τον ορισμό, η Εσσιανή είναι αρνητικά ορισμένη και επομένως στο $O = (0,0)$ έχουμε τοπικό μέγιστο. Αυτό βέβαια φαίνεται καθαρά και στο Σχήμα 3.8.

Ειδικά για τις συναρτήσεις δύο μεταβλητών, από τις ιδιότητες των τετραγωνικών μορφών, προκύπτει ένα κριτήριο πιο εύχρηστο για την αναζήτηση τοπικών ακρότατων.

Αν η συνάρτηση $f(x, y)$ έχει συνεχείς μερικές παραγώγους μέχρι και δεύτερης τάξης σε ένα ανοιχτό σύνολο $U \subseteq \mathbf{R}^2$ και το σημείο $P = (x_0, y_0) \in U$ είναι ένα κρίσιμο σημείο, τότε:

- Αν $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P) > 0$ και $D = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P) \right) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P) \right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P) \right)^2 > 0$, στο P έχουμε τοπικό ελάχιστο. Η D ονομάζεται διακρίνουσα.
- Αν $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P) < 0$ και $D > 0$, στο P έχουμε τοπικό μέγιστο.
- Αν $D < 0$, στο P έχουμε σαγματικό σημείο.
- Αν $D = 0$, η μέθοδος δεν δίνει πληροφορία. Το σημείο ονομάζεται **εκφυλισμένο** κρίσιμο σημείο και ενδέχεται να είναι ακρότατο. Στις περιπτώσεις αυτές καταφεύγουμε στη μελέτη της γραφικής παράστασης της επιφάνειας ή των καμπύλων στάθμης.

Παράδειγμα 3.25

Θα μελετήσουμε τη συνάρτηση $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$ για τοπικά ακρότατα. Αναζητούμε αρχικά τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης λύνοντας το σύστημα

3. Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 6xy - 12 = 0.$$

Προσθέτοντας και αφαιρώντας τις δύο εξισώσεις παίρνουμε αντίστοιχα:

$$(x + y)^2 = 9 \quad \text{και} \quad (x - y)^2 = 1.$$

Επομένως τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης είναι

$$(1, 2), \quad (-1, -2), \quad (2, 1), \quad (-2, -1).$$

Οι μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης είναι:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6y$$

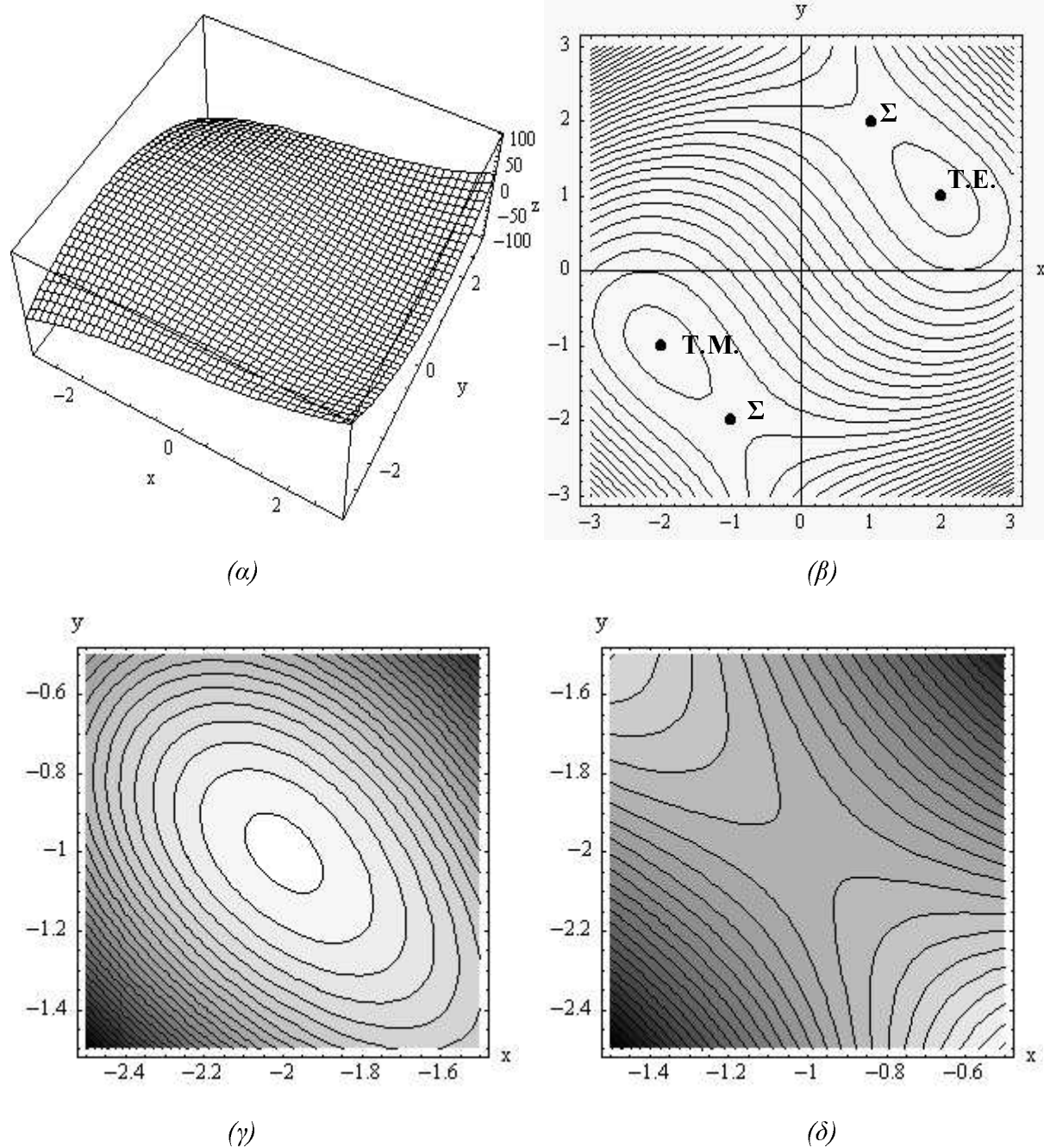
Στο (1,2): $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,2) = 6 > 0$, $D = -108 < 0$, άρα είναι σαγματικό σημείο.

Στο (-1,-2): $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,-2) = -6 < 0$, $D = -108 < 0$, άρα είναι σαγματικό σημείο.

Στο (2,1): $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2,1) = 12 > 0$, $D = 108 > 0$, άρα είναι τοπικό ελάχιστο.

Στο (-2,-1): $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-2,-1) = -12 < 0$, $D = 108 > 0$, άρα είναι τοπικό μέγιστο.

Στο Σχήμα 3.9, στο πλαίσιο (α) βλέπουμε την επιφάνεια της συνάρτησης αλλά δεν είναι εύκολο να καταλάβουμε τη συμπεριφορά της γύρω από τα κρίσιμα σημεία. Στο πλαίσιο (β) φαίνονται οι καμπύλες στάθμης της συνάρτησης μαζί με τα 4 κρίσιμα σημεία. Είναι χαρακτηριστική η διαφορά της συμπεριφοράς της συνάρτησης γύρω από τα τοπικά ακρότατα (Τ.Μ. και Τ.Ε.) από αυτήν γύρω από τα σαγματικά σημεία (Σ). Για πιο προσεκτική γραφική διερεύνηση των κρίσιμων σημείων, στο πλαίσιο (γ) έχουμε σχεδιάσει τις καμπύλες στάθμης γύρω από το τοπικό μέγιστο (-2,-1) ενώ στο (δ) τις καμπύλες στάθμης γύρω από το σαγματικό (-1,-2). Οι αποχρώσεις δείχνουν το ύψος της επιφάνειας. Παρατηρήστε στο (γ) ότι το σημείο (-2,-1) βρίσκεται σε υψηλότερη θέση από όλα τα γειτονικά του (φωτεινότερη απόχρωση) ενώ στο (δ) ότι στην κατεύθυνση της μίας διαγωνίου οι τιμές φθίνουν ενώ στην κατεύθυνση της άλλης αυξάνουν.



Σχήμα 3.9: Γραφική μελέτη των κρίσιμων σημείων μίας συνάρτησης

§3.6. Πολλαπλασιαστές *Lagrange*

Στην παράγραφο αυτή θα εξετάσουμε μία άλλη μέθοδο εύρεσης ακρότατων σημείων μίας συνάρτησης. Η μέθοδος αυτή εφαρμόζεται όταν μας ενδιαφέρει να εντοπίσουμε το μέγιστο ή

3. Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

το ελάχιστο μίας συνάρτησης από ένα σύνολο σημείων του πεδίου ορισμού της το οποίο περιγράφεται από μία εξίσωση. Το πρόβλημα είναι γνωστό σαν **εύρεση ακρότατων υπό συνθήκη**. Θα διατυπώσουμε λοιπόν το πρόβλημα με μαθηματικούς όρους και θα δώσουμε μία μέθοδο επίλυσής του.

Έστω δύο συναρτήσεις $f: U \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ και $g: U \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$. Θεωρούμε το σύνολο των σημείων $X = (x_1, \dots, x_n) \in U$ τα οποία ανήκουν στο σύνολο στάθμης που ορίζεται από την εξίσωση $g(X) = c$. Το πρόβλημα είναι να βρούμε όλα τα σημεία $P = (p_1, \dots, p_n)$ πάνω στην επιφάνεια $g(X) = c$, $c = \text{σταθερό}$, για τα οποία το $f(P)$ να είναι μέγιστο ή ελάχιστο πάνω στην επιφάνεια. Με άλλα λόγια, θέλουμε να εντοπίσουμε όλα τα σημεία P για τα οποία ισχύει $g(P) = c$ και είτε

$$f(P) \geq f(X) \text{ για όλα τα } X \text{ για τα οποία } g(X) = c$$

ή

$$f(P) \leq f(X) \text{ για όλα τα } X \text{ για τα οποία } g(X) = c.$$

Κάθε τέτοιο σημείο ονομάζεται **ακρότατο της f κάτω από τη συνθήκη (περιορισμό) g** .

Το παρακάτω θεώρημα μας παρέχει μία μέθοδο εύρεσης τέτοιων ακρότατων.

Θεώρημα των πολλαπλασιαστών Lagrange

Έστω g παραγωγίσιμη συνάρτηση με συνεχείς μερικές παραγώγους, ορισμένη σε ένα ανοιχτό σύνολο $U \subseteq \mathbf{R}^n$. Έστω $S \subset U$ το σύνολο των σημείων $X = (x_1, \dots, x_n) \in U$ για τα οποία ισχύει $g(X) = c$ αλλά $\nabla g(X) \neq (0, \dots, 0)$. Έστω f παραγωγίσιμη συνάρτηση με συνεχείς μερικές παραγώγους, ορισμένη στο U και $P = (p_1, \dots, p_n)$ ένα σημείο του S το οποίο είναι ακρότατο της f στο S (δηλαδή το P είναι ακρότατο της f υπό τον περιορισμό g). Τότε υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός λ , τέτοιος ώστε

$$\nabla f(P) = \lambda \nabla g(P).$$

Η σταθερά λ ονομάζεται **πολλαπλασιαστής Lagrange**.

Το θεώρημα λέει απλά ότι σε ένα τέτοιο ακρότατο υπό συνθήκη, οι μερικές παράγωγοι της f είναι ανάλογες αυτών της g . Για να βρούμε τα σημεία $P = (p_1, \dots, p_n)$ όπου συμβαίνει αυτό, πρέπει να λύσουμε το σύστημα των εξισώσεων

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n) = \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, \dots, x_n) = \lambda \frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_n) = \lambda \frac{\partial g}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_n) \\ g(x_1, \dots, x_n) = c \end{array} \right.$$

ως προς x_1, \dots, x_n και λ . Βέβαια, στη συνέχεια πρέπει να διερευνήσουμε με παραγώγους δεύτερης τάξης αν στα σημεία που αποτελούν λύση του παραπάνω συστήματος υπάρχει μέγιστο ή ελάχιστο, αλλά πολλές φορές είναι αρκετό να λύσουμε το σύστημα και να καταλήξουμε σε συμπέρασμα με γεωμετρικούς τρόπους.

Παράδειγμα 3.26

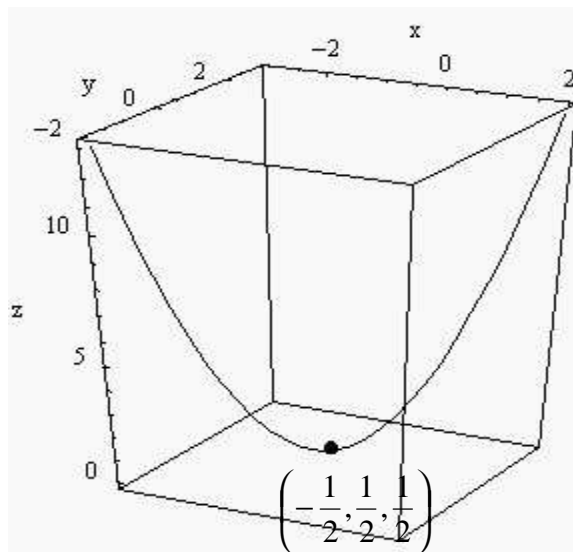
Θα βρούμε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x, y) = x^2 + y^2$ κάτω από τον περιορισμό $y - x = 1$. Εδώ η συνάρτηση που ορίζει τον περιορισμό είναι η $g(x, y) = y - x$ ενώ η σταθερά $c = 1$. Παρατηρούμε ότι ενώ η αρχική συνάρτηση $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ έχει σαν γραφική παράσταση μία απεριόριστη επιφάνεια (Σχήμα 3.2 (α)), η συνάρτηση $f: S \rightarrow \mathbf{R}$, όπου

$$S = \{(x, y) / y - x = 1\}$$

έχει σαν γραφική παράσταση μία καμπύλη μέσα στον τρισδιάστατο χώρο η οποία μάλιστα έχει διανυσματική εξίσωση

$$\vec{r}(t) = (t, t+1, t^2 + (t+1)^2).$$

Η γραφική παράσταση της καμπύλης αυτής δίνεται στο Σχήμα 3.10 και είναι μία παραβολή.



Σχήμα 3.10: Ο περιορισμός της $f(x, y) = x^2 + y^2$ στο $S = \{(x, y) / y - x = 1\}$

Αν λύσουμε τώρα το σύστημα

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \\ g(x, y) = c \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} 2x = -\lambda \\ 2y = \lambda \\ y - x = 1 \end{cases}$$

ως προς x, y και λ θα πάρουμε:

$$x = -\frac{1}{2}, \quad y = \frac{1}{2}, \quad \lambda = 1.$$

Δηλαδή στο σημείο $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ έχουμε πιθανό τοπικό ακρότατο. Από το Σχήμα 3.10 μπορούμε να συμπεράνουμε ότι αυτό είναι ένα τοπικό ελάχιστο. Εδώ πρέπει να τονίσουμε ότι το σημείο αυτό είναι ελάχιστο για την $f : S \rightarrow \mathbf{R}$ αλλά όχι και για την αρχική $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$.

Όπως αναφέραμε, η μέθοδος των πολλαπλασιαστών Lagrange, εντοπίζει πιθανά ακρότατα μίας συνάρτησης περιορισμένης σε ένα υποσύνολο του αρχικού πεδίου ορισμού της μορφής $S = \{(x_1, \dots, x_n) / g(x_1, \dots, x_n) = c\}$. Τα σημεία όμως αυτά δεν γνωρίζουμε αν είναι ελάχιστα, μέγιστα ή σαγματικά. Αν η επιφάνεια S είναι φραγμένη, τότε η f έχει σίγουρα ένα ελάχιστο και ένα μέγιστο εκεί. Στην ευνοϊκή περίπτωση που από τη λύση του συστήματος προκύψουν μόνο δύο κρίσιμα σημεία, μπορούμε να αποφασίσουμε ποιο είναι

3. Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

ελάχιστο και ποιο μέγιστο συγκρίνοντας τις τιμές της f στα σημεία αυτά. Αν όμως τα κρίσιμα σημεία είναι περισσότερα, είναι ανάγκη να χρησιμοποιήσουμε κάποιο κριτήριο. Θα αναφέρουμε το κριτήριο αυτό μόνο για την περίπτωση των συναρτήσεων δύο μεταβλητών.

Έστω $f:U \subseteq \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ και $g:U \subseteq \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ συναρτήσεις με μερικές παραγώγους μέχρι και δεύτερης τάξης. Έστω ένα σημείο $P=(p_1, p_2) \in U$ το οποίο ανήκει στην καμπύλη στάθμης $S=\{(x,y) \in U / g(x,y)=c\}$, ισχύει δηλαδή $g(p_1, p_2)=c$. Υποθέτουμε επίσης ότι $\nabla g(P) \neq (0,0)$ και ότι $\nabla f(P)=\lambda \nabla g(P)$ για κάποιον πραγματικό αριθμό λ . Αν θεωρήσουμε την βοηθητική συνάρτηση $h=f-\lambda g$ και την ορίζουσα της λεγόμενης **περιορισμένης Εσσιανής**

$$|\bar{H}|(P)=\begin{vmatrix} 0 & -\frac{\partial g}{\partial x}(P) & -\frac{\partial g}{\partial y}(P) \\ -\frac{\partial g}{\partial x}(P) & \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(P) & \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(P) \\ -\frac{\partial g}{\partial y}(P) & \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(P) & \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(P) \end{vmatrix}$$

τότε:

- Αν $|\bar{H}|(P) > 0$, το σημείο P είναι τοπικό μέγιστο για την $f:S \rightarrow \mathbf{R}$.
- Αν $|\bar{H}|(P) < 0$, το σημείο P είναι τοπικό ελάχιστο για την $f:S \rightarrow \mathbf{R}$.
- Αν $|\bar{H}|(P) = 0$, το κριτήριο δεν οδηγεί σε συμπέρασμα. Το P μπορεί να είναι ελάχιστο, μέγιστο ή σαγματικό σημείο.

Παράδειγμα 3.27

Από το Παράδειγμα 3.26 έχουμε $P=\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $h=f-\lambda g=x^2+y^2-y+x$ και

$$|\bar{H}|=\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}=-4<0.$$

Επομένως, το σημείο $P=\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ είναι τοπικό ελάχιστο.

3. Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

Η μέθοδος των πολλαπλασιαστών Lagrange μπορεί να γενικευτεί και σε περιπτώσεις όπου η επιφάνεια S ορίζεται από περισσότερες συνθήκες της μορφής

$$\begin{cases} g_1(x_1, \dots, x_n) = c_1 \\ g_2(x_1, \dots, x_n) = c_2 \\ \vdots \\ g_k(x_1, \dots, x_n) = c_k \end{cases}.$$

Τότε το θεώρημα των πολλαπλασιαστών Lagrange γενικεύεται ως εξής:

Αν η $f: S \rightarrow \mathbf{R}$ έχει ακρότατο στο σημείο $P = (p_1, \dots, p_n)$, τότε υπάρχουν σταθερές $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ (όσες και οι συνθήκες) τέτοιες ώστε

$$\nabla f(P) = \lambda_1 \nabla g_1(P) + \dots + \lambda_k \nabla g_k(P).$$

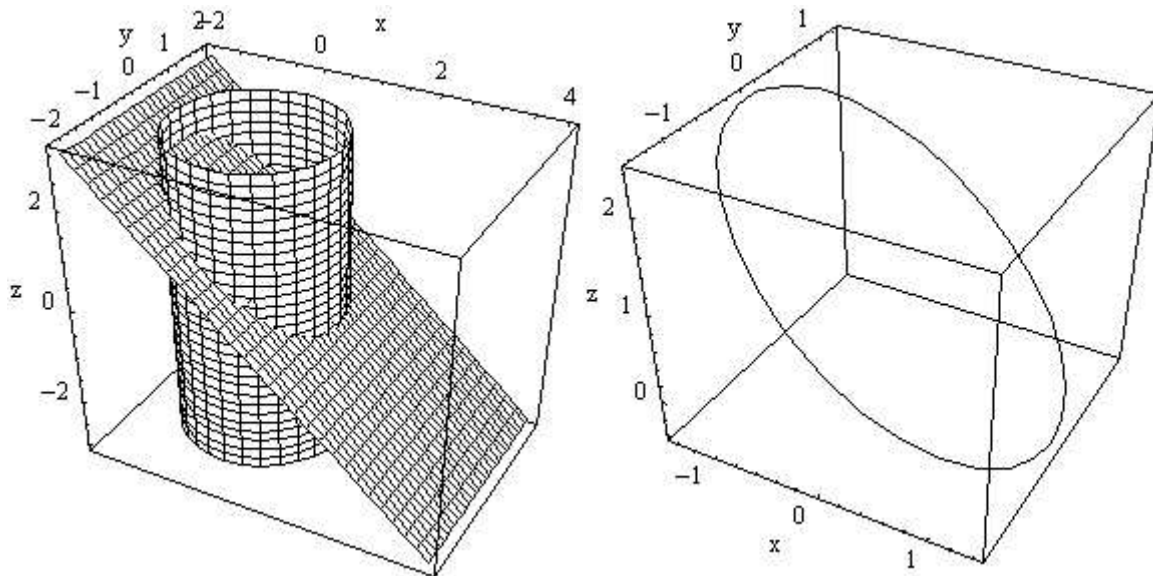
Παράδειγμα 3.28

Θα βρούμε τα ακρότατα της $f(x, y, z) = x + y + z$ κάτω από τις συνθήκες $x^2 + y^2 = 2$ και $x + z = 1$. Εδώ λοιπόν η επιφάνεια S , όπου περιορίζεται η f , ορίζεται από τις σχέσεις

$$g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 = 2 \quad \text{και} \quad g_2(x, y, z) = x + z = 1.$$

Αξίζει να κατανοήσουμε τι ακριβώς σημαίνει αυτός ο περιορισμός. Η αρχική συνάρτηση f ορίζεται σε όλο το \mathbf{R}^3 . Ο πρώτος περιορισμός παριστά μία επιφάνεια στάθμης που η γραφική του παράσταση είναι ένας κυκλικός κύλινδρος. Ο δεύτερος περιορισμός είναι μία επιφάνεια στάθμης με γραφική παράσταση ένα επίπεδο. Το σύνολο S είναι η τομή των δύο αυτών επιφανειών, δηλαδή είναι μία καμπύλη (Σχήμα 3.11 (α) και (β)). Η διανυσματική συνάρτηση που αντιστοιχεί στην καμπύλη αυτή είναι η

$$\vec{r}(t) = (\sqrt{2} \cos t, \sqrt{2} \sin t, 1 - \sqrt{2} \cos t), \quad t \in [0, 2\pi].$$



Σχήμα 3.11: Η καμπύλη S σαν τομή δύο επιφανειών

Επομένως, ο περιορισμός της f στην S θα είναι:

$$f(x, y, z) = x + y + z = \sqrt{2} \cos t + \sqrt{2} \sin t + 1 - \sqrt{2} \cos t = 1 + \sqrt{2} \sin t, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Αν παραγωγίσουμε την συνάρτηση ως προς t και εξισώσουμε με το μηδέν, θα δούμε ότι πιθανά ακρότατα υπάρχουν στα σημεία όπου $t = \frac{\pi}{2}$ και $t = \frac{3\pi}{2}$. Επειδή $f'(t) = \sqrt{2} \cos t$, έχουμε $f'(\pi/2) = \sqrt{2} > 0$ και $f'(3\pi/2) = -\sqrt{2} < 0$, οπότε τα σημεία που είναι ακρότατα κάτω από τους περιορισμούς είναι:

- Για $t = \frac{\pi}{2}$: Στο $(0, \sqrt{2}, 1, 1 + \sqrt{2})$ έχουμε τοπικό μέγιστο
- Για $t = \frac{3\pi}{2}$: Στο $(0, -\sqrt{2}, 1, 1 - \sqrt{2})$ έχουμε τοπικό ελάχιστο

Αν εργαστούμε με τους πολλαπλασιαστές Lagrange, θα πρέπει να λύσουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial x}, & \frac{\partial f}{\partial y} &= \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial y}, & \frac{\partial f}{\partial z} &= \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial z}, \\ g_1(x, y, z) &= 2, & g_2(x, y, z) &= 1 \end{aligned}$$

για $x, y, z, \lambda_1, \lambda_2$. Υπολογίζοντας τις μερικές παραγώγους καταλήγουμε στο σύστημα

$$1 = 2\lambda_1 x + \lambda_2,$$

$$1 = 2\lambda_1 y$$

$$1 = \lambda_2$$

$$x^2 + y^2 = 2$$

$$x + z = 1$$

Από αυτές έχουμε: $x = 0$, $y = \pm\sqrt{2}$, $z = 1$, $\lambda_1 = \pm\frac{1}{2\sqrt{2}}$, $\lambda_2 = 1$. Τα κρίσιμα σημεία λοιπόν της S είναι $(0, \sqrt{2}, 1)$ και $(0, -\sqrt{2}, 1)$. Επειδή η S είναι κλειστή και τα κρίσιμα σημεία είναι μόνο δύο, στο ένα θα έχουμε τοπικό μέγιστο και στο άλλο τοπικό ελάχιστο για την f . Υπολογίζοντας τις τιμές της συνάρτησης, συμπεραίνουμε ότι το $(0, \sqrt{2}, 1)$ δίνει μέγιστο, ενώ το $(0, -\sqrt{2}, 1)$ ελάχιστο.

§3.7. Ολικά ακρότατα – εντοπισμός με προσομοίωση

Ένα πολύ σημαντικό πρόβλημα στην μελέτη συναρτήσεων, είναι η εύρεση των ολικών της ακρότατων. Αντιμετωπίζουμε τέτοια προβλήματα σε περιπτώσεις βελτιστοποίησης όπου από έναν χώρο καταστάσεων, πρακτικά άπειρο, μας ενδιαφέρει να εντοπίσουμε την κατάσταση που βελτιστοποιεί μία αντικειμενική συνάρτηση κόστους. Ανάλογα με το πρόβλημα, η βελτιστοποίηση μπορεί να ανάγεται είτε σε ελαχιστοποίηση, είτε σε μεγιστοποίηση της συνάρτησης. Ο εντοπισμός των σημείων αυτών γίνεται δυσκολότερος με την αύξηση του αριθμού των μεταβλητών και με την πολυπλοκότητα του χώρου των καταστάσεων (πεδίο ορισμού). Στην παράγραφο αυτή θα περιγράψουμε μία μέθοδο για τον εντοπισμό των ολικών ακρότατων μίας συνάρτησης με τη χρήση ενός αλγόριθμου τυχαίας αναζήτησης.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μία συνάρτηση $f: U \rightarrow R$ όπου το U είναι ένα σύνολο στον \mathbf{R}^n . Ένα σημείο $P = (p_1, \dots, p_n) \in U$ λέγεται **ολικό** ή **απόλυτο μέγιστο** της f αν $f(X) \leq f(P)$ για κάθε $X = (x_1, \dots, x_n) \in U$. Αντίστοιχα, το P λέγεται **ολικό** ή **απόλυτο ελάχιστο** της f αν $f(X) \geq f(P)$ για κάθε $X \in U$.

Η εύρεση του ολικού ελαχίστου και μέγιστου με αναλυτικές μεθόδους παραγωγίσης, είναι δυνατή κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες. Πρέπει δηλαδή το πεδίο ορισμού της f να

είναι **φραγμένο** (να μπορούμε να το κλείσουμε μέσα σε μία μπάλα) και να αποτελείται από ένα ανοιχτό σύνολο και μία παραμετρική, ομαλή κατά τμήματα καμπύλη, που το οριοθετεί σαν σύνορο. Ακόμη, πρέπει η συνάρτηση να είναι συνεχής και παραγωγίσιμη. Όπως αποδεικνύεται, υπάρχει πάντοτε ένα ολικό ελάχιστο και ένα μέγιστο κάτω από τις συνθήκες αυτές. Τότε, εντοπίζουμε όλα τα κρίσιμα σημεία στο ανοιχτό σύνολο αλλά και πάνω στην συνοριακή καμπύλη (τα άκρα της θα εξεταστούν ξεχωριστά σαν υποψήφια ακρότατα), υπολογίζουμε την τιμή της συνάρτησης σε όλα αυτά τα σημεία και στη συνέχεια επιλέγουμε τα σημεία που δίνουν την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή.

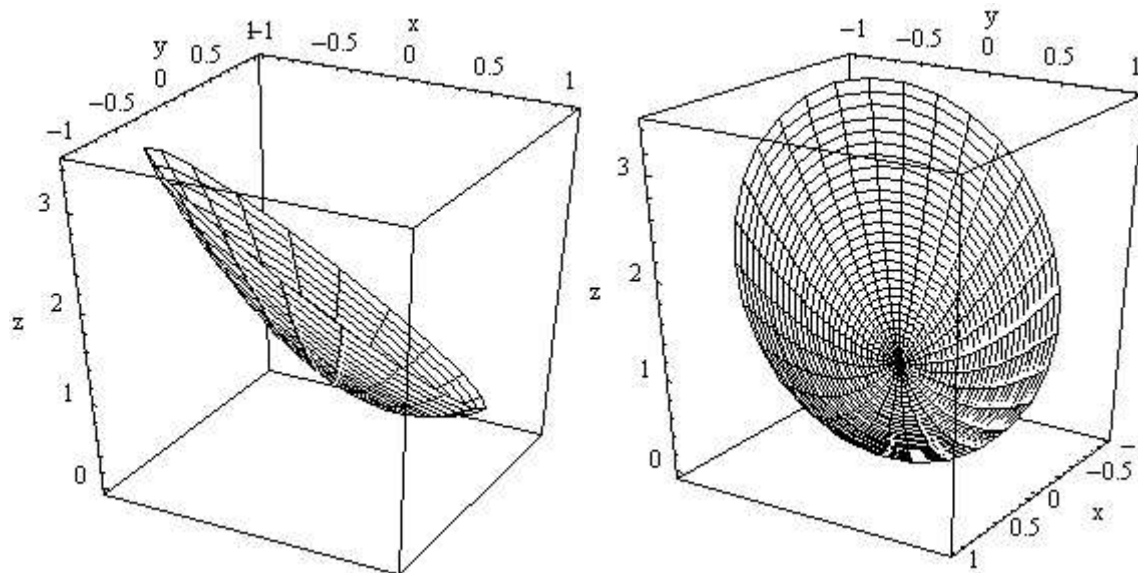
Παράδειγμα 3.29

Θα εντοπίσουμε το ολικό ελάχιστο και το ολικό μέγιστο της συνάρτησης

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - x - y + 1$$

στον δίσκο $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Παρατηρούμε αρχικά ότι όλες οι συνθήκες που περιγράψαμε προηγουμένως ισχύουν. Η συνάρτηση είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο D και επιπλέον το D είναι φραγμένο και αποτελείται από το ανοιχτό σύνολο $U = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ και τον κύκλο $x^2 + y^2 = 1$ που μπορούμε να τον θεωρήσουμε σαν καμπύλη με παραμετρική (διανυσματική) εξίσωση $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.



Σχήμα 3.12: Απόψεις της $f(x, y) = x^2 + y^2 - x - y + 1$ στον μοναδιαίο δίσκο

3. Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

Εντοπίζουμε στη συνέχεια όλα τα κρίσιμα σημεία μέσα στον ανοιχτό δίσκο. Πρέπει να ισχύουν ταυτόχρονα οι σχέσεις

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 1 = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 1 = 0.$$

Επομένως το σημείο $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο μέσα στον ανοιχτό δίσκο U .

Για να βρούμε και τα κρίσιμα σημεία πάνω στον κύκλο, σχηματίζουμε τη σύνθετη συνάρτηση

$$g(t) = f(\vec{r}(t)) = \cos^2 t + \sin^2 t - \cos t - \sin t + 1 = 2 - \cos t - \sin t$$

και λύνουμε την εξίσωση

$$g'(t) = \sin t - \cos t = 0.$$

Τα σημεία που την επαληθεύουν στο $(0, 2\pi)$ και θα εξεταστούν σαν υποψήφια ολικά ακρότατα είναι τα $t = \frac{\pi}{4}$ και $t = \frac{5\pi}{4}$. Σημειώστε ότι τα άκρα της καμπύλης $t = 0$ και $t = 2\pi$ θα εξεταστούν χωριστά και αυτά σαν υποψήφια ολικά ακρότατα.

Οι τιμές της συνάρτησης f στα κρίσιμα σημεία που βρήκαμε είναι:

$$f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2},$$

$$f\left(\vec{r}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2 - \sqrt{2}, \quad f\left(\vec{r}\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right) = f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2 + \sqrt{2},$$

$$f(\vec{r}(0)) = f(\vec{r}(2\pi)) = f(1, 0) = 1$$

Συγκρίνοντας τις τιμές αυτές, βλέπουμε καθαρά ότι το ολικό ελάχιστο βρίσκεται στο σημείο $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ και το ολικό μέγιστο στο σημείο $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Στο Σχήμα 3.12 βλέπουμε δύο απόψεις της συνάρτησης με πεδίο ορισμού τον μοναδιαίο δίσκο.

Δυστυχώς, οι συναρτήσεις που έχουμε να βελτιστοποιήσουμε στην πράξη δεν είναι τόσο εύκολες όσο αυτή του Παραδείγματος 3.29. ούτε το πεδίο ορισμού τους έχει τις καλές ιδιότητες που υποθέσαμε. Σε κάποιες πρακτικές εφαρμογές όπου η θεωρητική λύση είναι αδύνατη, μας είναι αρκετό να προσεγγίσουμε το ολικό βέλτιστο (μέγιστο ή ελάχιστο, ανάλογα με το πρόβλημα) με κάποια τυχαία μέθοδο αναζήτησης. Υποτίθεται βέβαια ότι η

αναζήτηση θα περιλαμβάνει έναν τεράστιο αριθμό τυχαίων βημάτων και συγκρίσεων στο πεδίο ορισμού και θα διεξαχθεί με την εκτέλεση αλγόριθμου σε υπολογιστή.

Η ιδέα της τυχαίας αναζήτησης της βέλτιστης τιμής μπορεί να συνοψιστεί ως εξής: Αρχίζουμε από ένα τυχαίο σημείο του πεδίου ορισμού (συνήθως κάποιο που υποψιαζόμαστε ότι είναι ολικό ακρότατο, ή έστω ότι είναι κοντά στο ολικό ακρότατο που αναζητούμε) και προχωρούμε τυχαία στα γειτονικά του σημεία συγκρίνοντάς το με αυτά, βασιζόμενοι στην τιμή της συνάρτησης. Αν στην πορεία αυτή φτάσουμε σε σημείο που δίνει καλύτερη τιμή για τη συνάρτηση, το σημείο αυτό θεωρείται νέο αρχικό σημείο από όπου εξετάζουμε πάλι όλα τα γειτονικά του κ.ο.κ. Ο αλγόριθμος θα τερματιστεί αφού εκτελεστεί ένας μεγάλος αριθμός συγκρίσεων χωρίς να πετύχουμε βελτιστοποίηση της συνάρτησης. Η μέθοδος αυτή είναι απλή και σε μερικές περιπτώσεις όπου το ολικό βέλτιστο είναι ένα από τα λίγα τοπικά ακρότατα που υπάρχουν, καταφέρνει να πλησιάσει ή ακόμη και να εντοπίσει το ολικό βέλτιστο. Έχει όμως ένα βασικό μειονέκτημα, τον πιθανό εγκλωβισμό του αλγόριθμου γύρω από ένα τοπικό ακρότατο που όμως απέχει πολύ από το ολικό.

Η μέθοδος που θα περιγράψουμε τώρα ονομάζεται **προσομοιωμένη ισχυροποίηση** (*simulated annealing*) και πήρε το όνομά της αλλά και τις βασικές αρχές της από τη διαδικασία ισχυροποίησης μετάλλων με τη διαδικασία διαδοχικών τήξεων και ψύξεων έτσι ώστε το μέταλλο να φτάσει σε μία ελάχιστη ενεργειακή κατάσταση. Από εδώ και στο εξής λοιπόν θα υποθέσουμε, χωρίς περιορισμό της γενικότητας, ότι έχουμε να βρούμε το ολικό ελάχιστο μίας συνάρτησης που είναι θετική σε όλο το πεδίο ορισμού της. Υποθέτουμε δηλαδή ότι θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε τη συνάρτηση $f(X) > 0$ όπου το $X = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega \subset \mathbf{R}^n$. Μία από τις πολλές παραλλαγές του αλγόριθμου εκτελείται με τον παρακάτω τρόπο:

Η αναζήτηση αρχίζει με ένα αυθαίρετα επιλεγμένο σημείο $X_0 \in \Omega$, το οποίο είτε επιλέγεται τυχαία είτε καθορίζεται με βάση κάποιες πληροφορίες που διαθέτουμε για τη φύση της συνάρτησης και συνεχίζεται με την εξέταση μίας ακολουθίας σημείων που το κάθε ένα παράγεται σαν *μετατόπιση* του προηγούμενου. Κάνουμε δηλαδή βήματα στο πεδίο ορισμού μεταπηδώντας από το κάθε σημείο X_0 , που θεωρείται *τρέχον*, σε κάποιο γειτονικό του X_1 . Το μέγεθος των βημάτων αυτών εξαρτάται από τις ιδιότητες της συνάρτησης και από την

ακρίβεια με την οποία θέλουμε να προσεγγίσουμε το ολικό ελάχιστο. Στην διάρκεια της αναζήτησης, κάθε φορά που μία μετατόπιση του τρέχοντος σημείου οδηγεί σε βελτίωση (δηλαδή $f(X_1) \leq f(X_0)$), το σημείο που προκύπτει από τη μετατόπιση γίνεται αποδεκτό σαν το νέο τρέχον σημείο από το οποίο θα προχωρήσουμε στην επόμενη μετατόπιση. Αν αντίθετα η μετατόπιση του τρέχοντος σημείου οδηγήσει σε χειροτέρευση (δηλαδή $f(X_1) > f(X_0)$), το μετατοπισμένο σημείο γίνεται δεκτό σαν αφετηρία της επόμενης μετατόπισης με πιθανότητα

$$p = \exp\left(-\frac{f_0^g \Delta f}{t}\right)$$

όπου $f_0 = f(X_0)$, $\Delta f = f_1 - f_0 = f(X_1) - f(X_0)$, t είναι μια παράμετρος του αλγόριθμου γνωστή και σαν «θερμοκρασία», και g ένας προκαθορισμένος αυθαίρετος μη θετικός αριθμός. Αν $g = 0$, η μέθοδος χαρακτηρίζεται και σαν **τυπική προσομοιωμένη ισχυροποίηση** (*standard simulated annealing*) ενώ αν $g < 0$ σαν **γενικευμένη προσομοιωμένη ισχυροποίηση** (*generalized simulated annealing*). Με τον τρόπο αυτό, οι μετατοπίσεις που οδηγούν σε ελαφρά χειρότερα σημεία είναι πιο πιθανό να αντικαταστήσουν το τρέχον σημείο, από τις μετατοπίσεις που οδηγούν σε σημαντικά χειρότερα σημεία (πάντοτε με κριτήριο την ελαχιστοποίηση της f). Ακόμη, επειδή η θερμοκρασία στη διάρκεια του αλγόριθμου συνεχώς μειώνεται, μία δεδομένη αύξηση της f είναι πιο πιθανό να γίνει δεκτή στα πρώτα στάδια της αναζήτησης. Η συμπεριφορά αυτή του αλγόριθμου έχει σκοπό την απόδραση από σημεία που είναι απλώς τοπικά ελάχιστα και τείνουν να παγιδεύουν τον αλγόριθμο γύρω τους. Καθ' όλη τη διάρκεια της αναζήτησης, ο αλγόριθμος παρακολουθεί και ανανεώνει το σημείο X_{best} που προέκυψε σαν «καλύτερο» (έδωσε δηλαδή την μικρότερη τιμή για τη συνάρτηση) μέχρι εκείνη τη στιγμή. Μετά από έναν προκαθορισμένο αριθμό μετατοπίσεων που δοκιμάζονται σε μία δεδομένη θερμοκρασία, χωρίς να προκύψει βελτίωση του καλύτερου σημείου X_{best} , η θερμοκρασία ελαττώνεται κατά έναν σταθερό παράγοντα και η αναζήτηση συνεχίζεται. Όταν μετά από έναν μεγάλο αριθμό δοκιμών, που έχει επίσης προκαθοριστεί, καμία μετατόπιση του τρέχοντος σημείου X_0 δεν οδηγεί σε βελτίωση σε δεδομένη θερμοκρασία, η αναζήτηση τερματίζεται και ο αλγόριθμος επιστρέφει σαν αποτέλεσμα το σημείο X_{best} .

Μπορούμε λοιπόν να περιγράψουμε τον αλγόριθμο με τα εξής βήματα:

3. Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

Βήμα 1: Καθορισμός αρχικών τιμών για τις παραμέτρους του αλγόριθμου:

t_0 : η αρχική «θερμοκρασία»

a_t : ο παράγοντας μείωσης της θερμοκρασίας ($0 < a_t < 1$)

I_{\max} : ο αριθμός μετατοπίσεων που θα δοκιμάσει ο αλγόριθμος προτού μειώσει την θερμοκρασία δεδομένου ότι δεν βρέθηκε καλύτερο σημείο (δεν άλλαξε το X_{best})

h : το μέγεθος της μετατόπισης (πόσο δηλαδή θα απέχει το X_1 από το X_0)

g : η μη θετική σταθερά στον τύπο της πιθανότητας

Βήμα 2: Έναρξη της αναζήτησης

Αυθαίρετη επιλογή αρχικού σημείου $X_0 \in \Omega$

$X_{best} := X_0$

$t := t_0$

$f_0 := f(X_0)$

Βήμα 3: Βρόχος θερμοκρασίας

$FLAG := 0$

$I := 1$

Βήμα 4: Βρόχος μετατοπίσεων

Παραγωγή n ανεξάρτητων τυχαίων αριθμών (y_1, \dots, y_n) από την τυπική κανονική κατανομή και υπολογισμός του μοναδιαίου διανύσματος κατεύθυνσης

$$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{y_1^2 + \dots + y_n^2}}(y_1, \dots, y_n).$$

$$X_1 := X_0 + h\vec{u}$$

Βήμα 5:

Αν $X_1 \notin \Omega$, επιστροφή στο Βήμα 4. Διαφορετικά, $f_1 := f(X_1)$ και $\Delta f := f_1 - f_0$.

Βήμα 6:

Αν $\Delta f \leq 0$, τότε $X_0 := X_1$, $f_0 := f_1$, $FLAG := 1$

Αν $\Delta f > 0$, τότε $p := \exp(-f_0^g \Delta f / t)$. (α) Παραγωγή τυχαίου αριθμού v από την ομοιόμορφη κατανομή $U[0, 1]$. (β) Αν $v < p$, $X_0 := X_1$, $f_0 := f_1$, $FLAG := 1$

Βήμα 7:

Αν $f(X_1) < f(X_{best})$, τότε $X_{best} := X_1$ και $I := 1$.

Αν $f(X_1) \geq f(X_{best})$, τότε $I := I + 1$

Βήμα 8:

Αν $I < I_{\max}$, πηγαίνουμε στο Βήμα 4.

Βήμα 9:

Αν $FLAG = 1$, τότε (α) $t = t \cdot a_t$ και (β) πηγαίνουμε στο Βήμα 3.

Βήμα 10:

Τερματισμός και αναφορά του X_{best} σαν αποτέλεσμα

Παρατηρήσεις:

(α) Αν ο παράγοντας μείωσης της θερμοκρασίας πάρει για παράδειγμα την τιμή $a_t = 0.95$, αυτό θα σημαίνει ότι η θερμοκρασία θα μειώνεται κάθε φορά κατά 5%. Γενικά, μικρές τιμές του a_t έχουν αποτέλεσμα την απότομη αλλαγή θερμοκρασίας με κέρδος στον χρόνο εκτέλεσης αλλά μεγάλη πιθανότητα αποτυχίας της αναζήτησης. Αντίθετα, τιμές κοντά στο 1 προκαλούν αργή αλλά πιο ασφαλή αναζήτηση.

(β) Οι υπόλοιπες παράμετροι στο Βήμα 1 απαιτούν αρκετούς πειραματισμούς αφού καθορίζονται με καθαρά εμπειρικό τρόπο και η εκλογή τους εξαρτάται από το είδος του προβλήματος που αντιμετωπίζουμε.

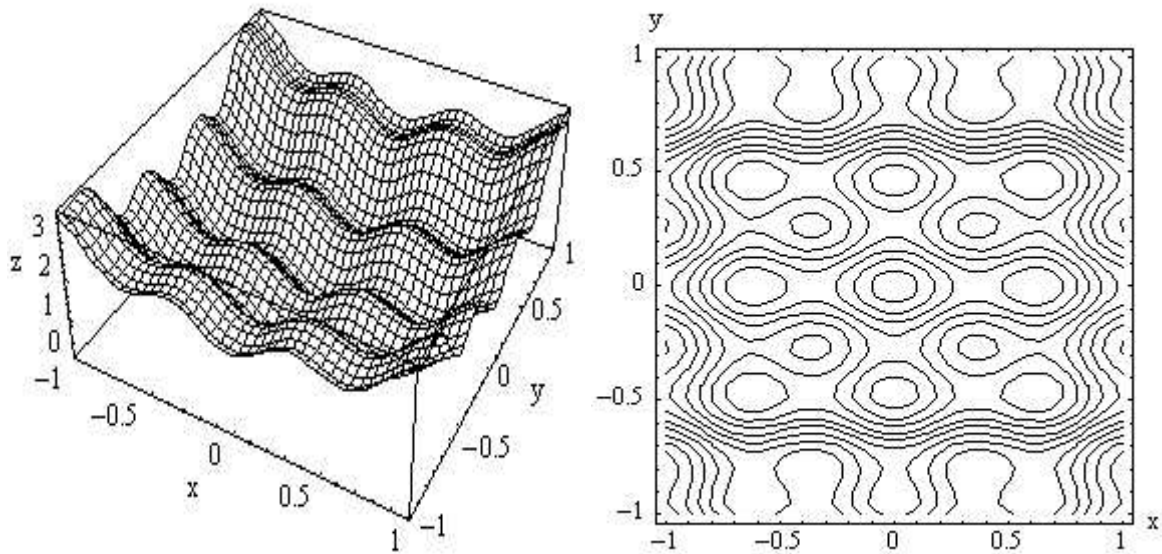
(γ) Στο Βήμα 4, καθορίζεται ο τρόπος μετάβασης από ένα σημείο σε κάποιο γειτονικό του. Η απόσταση είναι σταθερή και ίση με h , αλλά η κατεύθυνση είναι τυχαία.

Παράδειγμα 3.30

Για να γίνει κατανοητή η μέθοδος αναζήτησης ελαχίστου με προσομοίωση, θα την εφαρμόσουμε για την εύρεση ολικού ελάχιστου της συνάρτησης

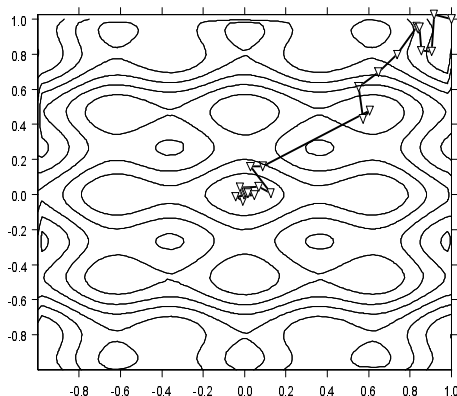
$$f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 0.3\cos(3\pi x) - 0.4\cos(4\pi y) + 0.7.$$

Όπως βλέπουμε από το Σχήμα 3.13, όπου παριστάνεται γραφικά η συνάρτηση και οι καμπύλες στάθμης, η συνάρτηση έχει πολλά τοπικά ακρότατα. Ακόμη, γνωρίζουμε ότι έχει τοπικό ελάχιστο στο σημείο $(0,0)$ και τιμή $f(0,0) = 0$.

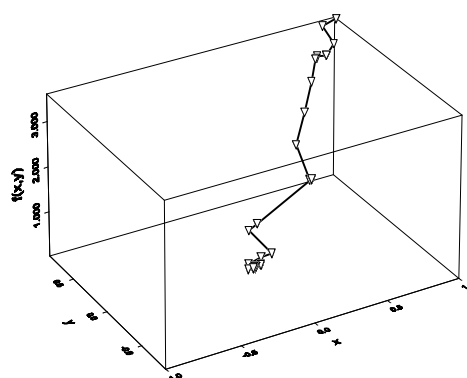


Σχήμα 3.13: Η συνάρτηση $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 0.3\cos(3\pi x) - 0.4\cos(4\pi y) + 0.7$

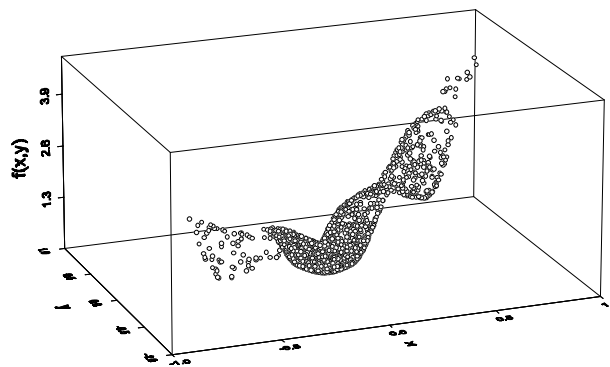
Ο αλγόριθμος της προσομοίωσης εκτελέστηκε (με ειδικό πρόγραμμα που αναπτύχθηκε στη στατιστική γλώσσα προγραμματισμού Splus V.4.0) με τιμές των αρχικών παραμέτρων $t=0.5$, $a_t=0.95$, $I_{\max}=50$, $h=0.10$ και $g=0$. Το σημείο από το οποίο ξεκίνησε ο αλγόριθμος ήταν το $(1,1)$, ενώ το σημείο στο οποίο κατάληξε και αναφέρθηκε σαν ελάχιστο ήταν το $(-0.00400636, 0.00026102)$ με ελάχιστη τιμή της συνάρτησης 0.000232176 . Συνολικά δοκίμασε 2641 σημεία και μείωσε την τιμή της συνάρτησης (βελτίωσε το X_{best}) 25 φορές. Στο Σχήμα 3.14 βλέπουμε στα πλαίσια (α) και (β) τη διαδρομή που ακολούθησε ο αλγόριθμος πετυχαίνοντας τις 25 διαδοχικές μειώσεις μέχρι να προσεγγίσει την περιοχή του $(0, 0)$, ενώ στο πλαίσιο (γ) βλέπουμε και τα 2641 σημεία από τα οποία πέρασε.



(α)



(β)



(γ)

Σχήμα 3.14: Αποτελέσματα της προσομοίωσης για την εύρεση ελαχίστου.

(α) και (β): Διαδοχικές βελτιώσεις από το αρχικό σημείο $(1,1)$ μέχρι την περιοχή του $(0,0)$

(γ): Όλα τα σημεία απ' όπου πέρασε ο αλγόριθμος

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Διανυσματικά πεδία

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με συναρτήσεις n μεταβλητών που όμως οι τιμές τους δεν είναι πραγματικοί αριθμοί αλλά σημεία του n -χώρου. Θα εξετάσουμε τις ιδιότητές τους και τη γεωμετρική τους σημασία. Οι συναρτήσεις αυτές είναι ουσιαστικά διανυσματικές συναρτήσεις πολλών μεταβλητών και αποτελούν γενίκευση των συναρτήσεων μίας μεταβλητής που εξετάσαμε στο Κεφάλαιο 2.

§4.1. Διανυσματικές συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

Στο Κεφάλαιο 3 ορίσαμε την κλίση μίας παραγωγίσιμης συνάρτησης $f(x_1, \dots, x_n)$, και την συμβολίσαμε με $gradf$ ή ∇f . Αν προσέξουμε την φύση της $gradf$, παρατηρούμε ότι είναι μία συνάρτηση η οποία αντιστοιχεί στο σημείο $P = (p_1, \dots, p_n)$, το διάνυσμα

$$gradf(P) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(p_1, \dots, p_n), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(p_1, \dots, p_n) \right).$$

Συχνά αναφερόμαστε στο $gradf$ σαν **διανυσματικό πεδίο κλίσεων**.

Γενικά, ονομάζουμε **διανυσματικό πεδίο** μία απεικόνιση $\vec{F}: U \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ η οποία αντιστοιχεί σε κάθε σημείο $P = (p_1, \dots, p_n)$ του πεδίου ορισμού U της, ένα διάνυσμα (ή σημείο) $\vec{F}(P)$. Ειδικά για $n=2$ και $n=3$, τα διανυσματικά πεδία έχουν τη μορφή αντίστοιχα:

$$\vec{F}(x, y) = F_1(x, y)\vec{x}_0 + F_2(x, y)\vec{y}_0 = (F_1(x, y), F_2(x, y))$$

και

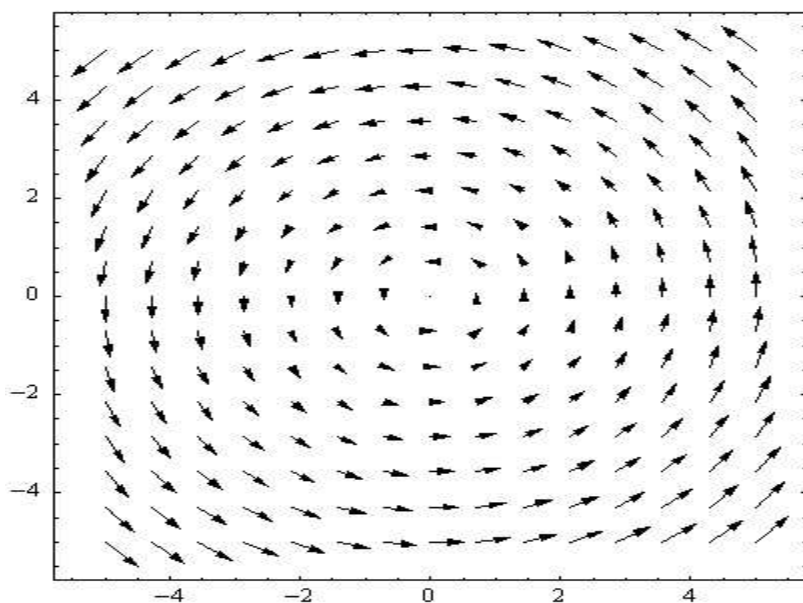
$$\vec{F}(x, y, z) = F_1(x, y, z)\vec{x}_0 + F_2(x, y, z)\vec{y}_0 + F_3(x, y, z)\vec{z}_0 = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z)).$$

Παρατηρούμε ότι οι συνιστώσες ενός διανυσματικού πεδίου στον \mathbf{R}^n είναι πραγματικές συναρτήσεις n μεταβλητών.

Όταν παριστάνουμε γραφικά τα διανυσματικά πεδία, είτε στο επίπεδο είτε στον τρισδιάστατο χώρο, συνηθίζουμε να σχεδιάζουμε το βέλος που αντιστοιχεί στο διάνυσμα $\vec{F}(P)$ με αρχή το σημείο P και όχι την αρχή των αξόνων όπως είχαμε συμφωνήσει αρχικά. Η μετατόπιση αυτή δείχνει καλύτερα την συμπεριφορά του διανυσματικού πεδίου.

Παράδειγμα 4.1

Ας θεωρήσουμε το διανυσματικό πεδίο $\vec{F}(x, y) = -y\vec{x}_0 + x\vec{y}_0$. Το πεδίο αυτό περιγράφει μία περιστροφική κίνηση. Η γραφική του παράσταση φαίνεται στο Σχήμα 4.1.



Σχήμα 4.1: Περιστροφικό διανυσματικό πεδίο

Παράδειγμα 4.2

Το διανυσματικό πεδίο $\vec{F}(x, y) = (\sin(xy), \cos(xy))$ έχει γραφική παράσταση αρκετά πολύπλοκη και ενδιαφέρουσα. Αυτή φαίνεται στο Σχήμα 4.2.

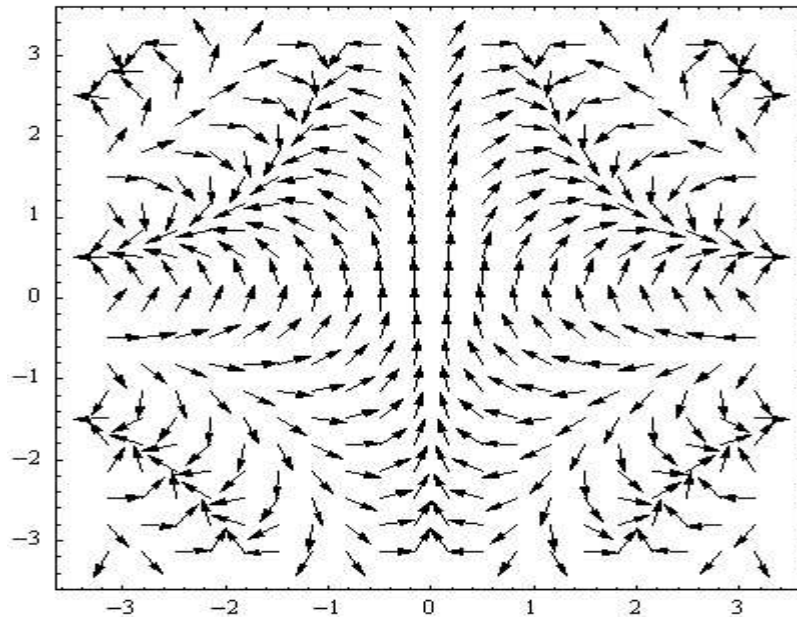
Παράδειγμα 4.3

Θα υπολογίσουμε το διανυσματικό πεδίο κλίσεων της συνάρτησης $f(x, y) = x^2 + y^2$. Η κλίση δίνεται από την

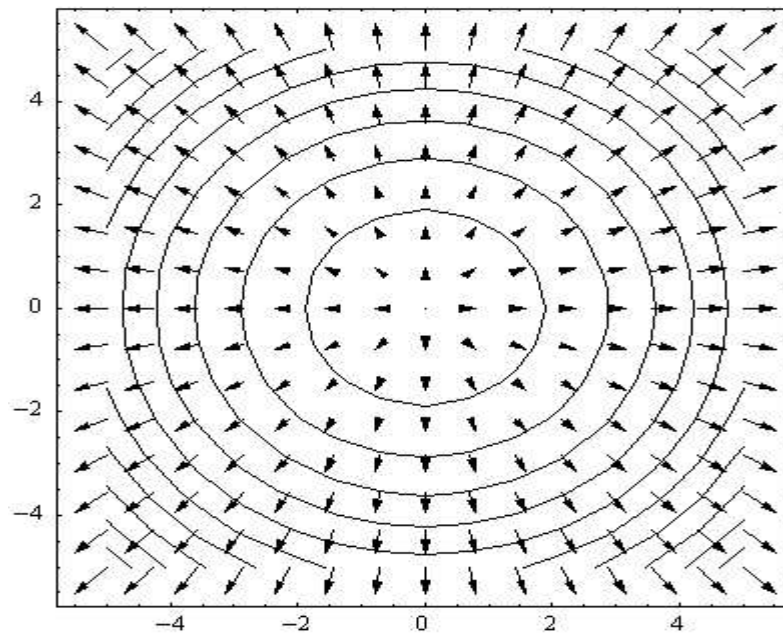
$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) = (2x, 2y) = \vec{F}(x, y).$$

4. Διανυσματικά πεδία

Το διανυσματικό πεδίο κλίσεων είναι ένα σύνολο διανυσμάτων που είναι ορθογώνια με τις καμπύλες στάθμης της συνάρτησης. Η διεύθυνση των διανυσμάτων αυτών δείχνει την κατεύθυνση προς την οποία αυξάνει γρηγορότερα η συνάρτηση. Αυτό φαίνεται στο Σχήμα 4.3 όπου έχουν σχεδιαστεί οι καμπύλες στάθμης της μορφής $x^2 + y^2 = c$ και το διανυσματικό πεδίο κλίσεων που είναι κάθετο στις καμπύλες αυτές.



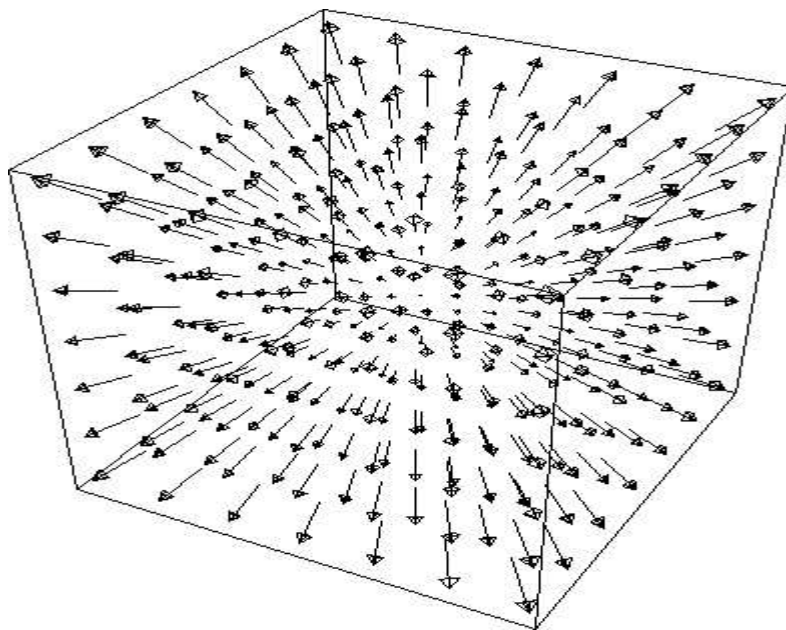
Σχήμα 4.2: Το διανυσματικό πεδίο $\vec{F}(x, y) = (\sin(xy), \cos(xy))$



Σχήμα 4.3: Καμπύλες στάθμης και διανυσματικό πεδίο κλίσεων

Παράδειγμα 4.4

Το διανυσματικό πεδίο $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ έχει γραφική παράσταση στο χώρο που φαίνεται στο Σχήμα 4.4. Παρατηρείστε ότι το διανυσματικό πεδίο φαίνεται να αποτελείται από διανύσματα κάθετα σε επιφάνειες ομόκεντρων σφαιρών. Αυτό ισχύει πραγματικά αφού η συνάρτηση $f(x, y, z) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$ έχει $\text{grad}f = \vec{F}(x, y, z)$, δηλαδή η \vec{F} είναι κάθετη στις επιφάνειες στάθμης της f που είναι ομόκεντρες σφαίρες με εξίσωση $x^2 + y^2 + z^2 = c$.



Σχήμα 4.4: Διανυσματικό πεδίο στον τρισδιάστατο χώρο

Είδαμε λοιπόν ότι η κλίση μίας συνάρτησης ορίζει ένα διανυσματικό πεδίο. Το αντίστροφο όμως δεν ισχύει πάντοτε. Δηλαδή, δεν είναι απαραίτητο ότι ένα διανυσματικό πεδίο είναι πεδίο κλίσεων κάποιας συνάρτησης. Αν υπάρχει παραγωγίσιμη συνάρτηση f για την οποία ισχύει $\text{grad}f = \vec{F}$, τότε το διανυσματικό πεδίο \vec{F} ονομάζεται **συντηρητικό** ενώ η συνάρτηση f ονομάζεται **δυναμική συνάρτηση**. Τα ερωτήματα που γεννώνται εδώ είναι: (α) Πότε ένα διανυσματικό πεδίο είναι συντηρητικό; (β) Είναι μοναδική η συνάρτηση δυναμικού; (γ) Με ποιο τρόπο μπορούμε να βρούμε την συνάρτηση δυναμικού; Σε επόμενο κεφάλαιο, όπου θα ασχοληθούμε με επικαμπύλια ολοκληρώματα διανυσματικής συνάρτησης, θα αναφέρουμε τρόπους με τους οποίους μπορεί κανείς να ελέγξει αν ένα πεδίο είναι συντηρητικό και να υπολογίσει την δυναμική συνάρτηση.

§4.2. Απόκλιση και περιστροφή διανυσματικού πεδίου

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε το διανυσματικό πεδίο του \mathbf{R}^3

$$\vec{F}(x, y, z) = F_1(x, y, z)\vec{x}_0 + F_2(x, y, z)\vec{y}_0 + F_3(x, y, z)\vec{z}_0 = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z)).$$

Αν χρησιμοποιήσουμε τον διαφορικό **τελεστή του Hamilton** ή **ανάδελτα**

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{x}_0 + \frac{\partial}{\partial y}\vec{y}_0 + \frac{\partial}{\partial z}\vec{z}_0 = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

με τον οποίο ορίσαμε την κλίση μίας πραγματικής συνάρτησης πολλών μεταβλητών, τότε μπορούμε να ορίσουμε την απόκλιση και την περιστροφή του διανυσματικού πεδίου \vec{F} .

Η **απόκλιση** του πεδίου \vec{F} ορίζεται:

$$\operatorname{div}\vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}.$$

Παρατηρήστε ότι ο τελεστής ∇ συμπεριφέρεται σαν διάνυσμα οπότε η απόκλιση μπορεί να οριστεί σαν το εσωτερικό γινόμενο των ∇ και \vec{F} . Αυτό σημαίνει ότι η απόκλιση είναι μία πραγματική συνάρτηση τριών μεταβλητών.

Αν το \vec{F} παριστά ένα πεδίο ταχυτήτων ενός ρευστού, η απόκλιση αντιστοιχεί στον ρυθμό μεταβολής του όγκου του ρευστού ως προς τον χρόνο, ανά μονάδα όγκου. Έτσι αν θεωρήσουμε το διανυσματικό πεδίο $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ του Παραδείγματος 4.4, μπορούμε να το φανταστούμε σαν ένα αέριο που διαστέλλεται ακτινικά από ένα κεντρικό σημείο προς όλες τις διευθύνσεις (Σχήμα 4.4). Ο ρυθμός διαστολής κάθε μονάδας όγκου ως προς την κάθε μονάδα του χρόνου είναι $\operatorname{div}\vec{F} = 3$, δηλαδή τρεις κυβικές μονάδες ανά μονάδα χρόνου. Το πρόσημο της απόκλισης μας δείχνει το είδος της μεταβολής του όγκου. Αν $\operatorname{div}\vec{F} > 0$ τότε έχουμε διαστολή του ρευστού, ενώ αν $\operatorname{div}\vec{F} < 0$, έχουμε συστολή. Στην περίπτωση που $\operatorname{div}\vec{F} = 0$, το διανυσματικό πεδίο \vec{F} ονομάζεται **ασυμπίεστο** ή **σωληνοειδές**.

Παράδειγμα 4.5

Ας θεωρήσουμε το διανυσματικό πεδίο

$$\vec{F}(x, y, z) = (x + y, x - \lambda y, 0).$$

Θα εξετάσουμε το είδος της μεταβολής του για διάφορες τιμές της παραμέτρου λ . Έχουμε:

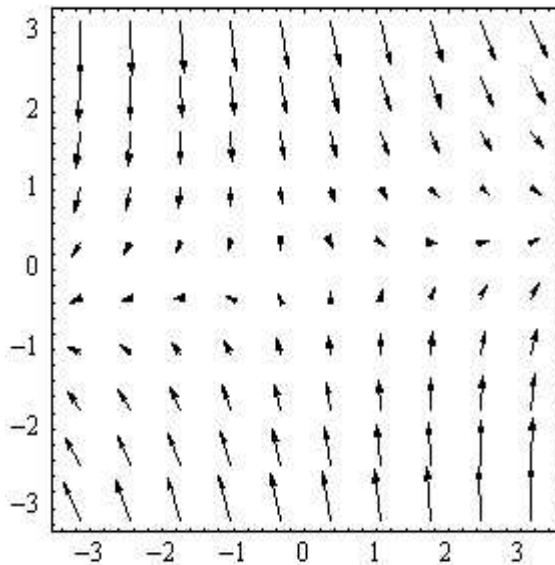
$$\operatorname{div} \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (x+y, x-\lambda y, 0) = \frac{\partial}{\partial x}(x+y) + \frac{\partial}{\partial y}(x-\lambda y) = 1-\lambda$$

Άρα, για $\lambda > 1$, έχουμε $\operatorname{div} \vec{F} < 0$ (Σχήμα 4.5 (α)) και επομένως συστολή, για $\lambda < 1$ διαστολή αφού $\operatorname{div} \vec{F} > 0$ (Σχήμα 4.5 (β)), ενώ για $\lambda = 1$ το πεδίο θα είναι σωληνοειδές (Σχήμα 4.5 (γ)). Για καλύτερη παρουσίαση της συμπεριφοράς του διανυσματικού πεδίου, σε όλα τα πλαίσια του Σχήματος 4.5, φαίνεται μόνο το επίπεδο (x, y) αφού το $z = 0$ και επομένως τα διανύσματα θα είναι παράλληλα στο επίπεδο.

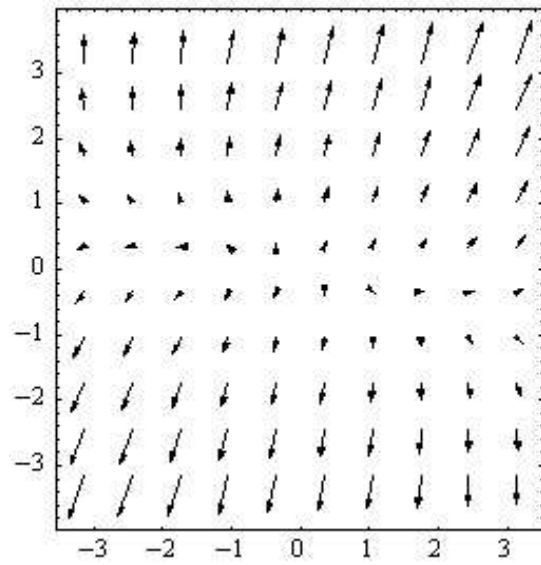
Η **περιστροφή** ή **στροβιλισμός** του διανυσματικού πεδίου $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ ορίζεται:

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) \vec{x}_0 + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) \vec{y}_0 + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \vec{z}_0$$

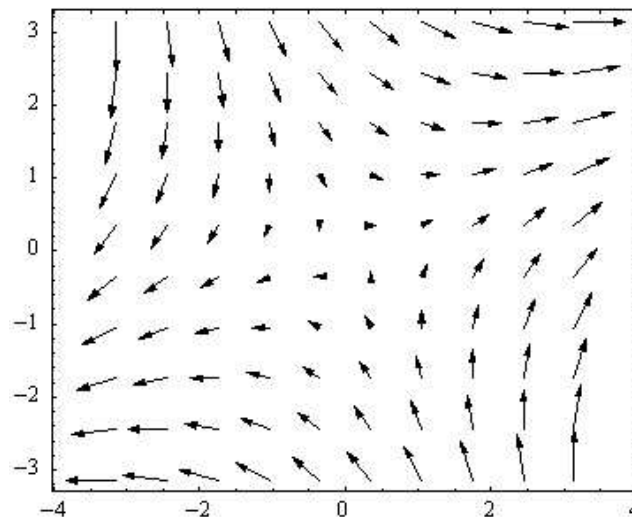
Παρατηρούμε ότι η περιστροφή (συμβολίζεται και $\operatorname{curl} \vec{F}$) είναι επίσης διανυσματικό πεδίο αφού υπολογίζεται σαν εξωτερικό γινόμενο των ∇ και \vec{F} . Η περιστροφή είναι ένα μέτρο της στροβιλώδους ροής ενός ρευστού σώματος όταν το \vec{F} παριστά το πεδίο ταχυτήτων του. Στην περίπτωση που $\operatorname{rot} \vec{F} = (0, 0, 0) = \vec{0}$, το πεδίο λέγεται **αστρόβιλο** (σε κάποιο σημείο) και πρακτικά σημαίνει ότι αν στο ρευστό τοποθετηθεί ένας μικρός τροχός, αυτός θα κινηθεί μαζί με το ρευστό, αλλά χωρίς να περιστρέφεται γύρω από τον άξονά του. Με άλλα λόγια, η κίνηση του ρευστού δεν εμφανίζει δίνες.



(α) $\lambda = 5$ (συστολή)



(β) $\lambda = -5$ (διαστολή)



(γ) $\lambda = 1$ (σωληνοειδές)

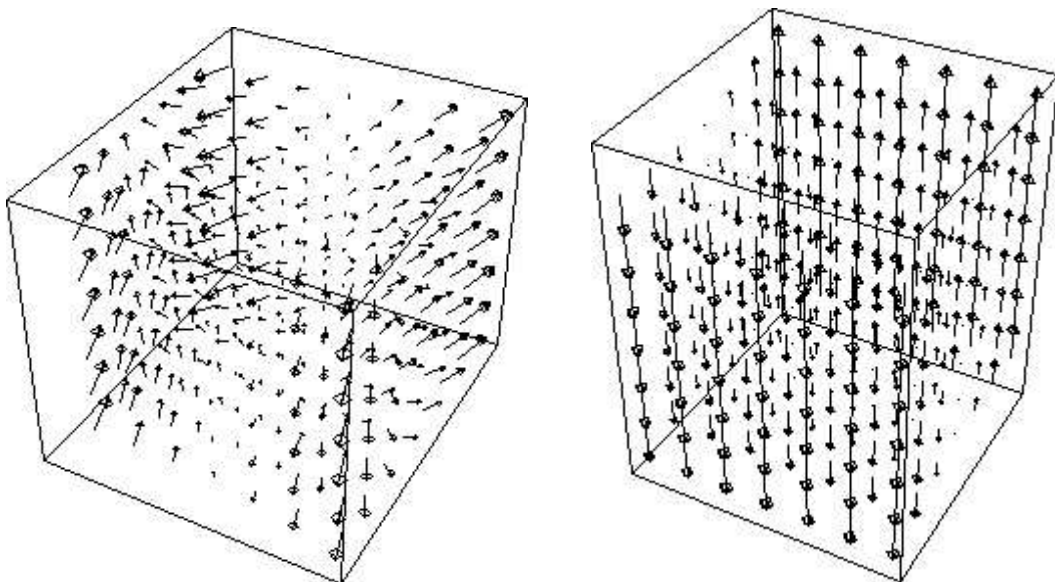
Σχήμα 4.5: Γραφική απεικόνιση των μεταβολών του διανυσματικού πεδίου του Παραδείγματος 4.5 για διάφορες τιμές της παραμέτρου λ

Παράδειγμα 4.6

Έστω $\vec{F}(x, y, z) = x\vec{x}_0 + xy\vec{y}_0 + \vec{z}_0$. Θα υπολογίσουμε την περιστροφή του.

$$\text{rot}\vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & xy & 1 \end{vmatrix} = y\vec{z}_0 = (0, 0, y)$$

Το διανυσματικό πεδίο \vec{F} και η περιστροφή του παριστάνονται γραφικά στο Σχήμα 4.6.



(α) \vec{F}

(β) $\text{rot}\vec{F}$

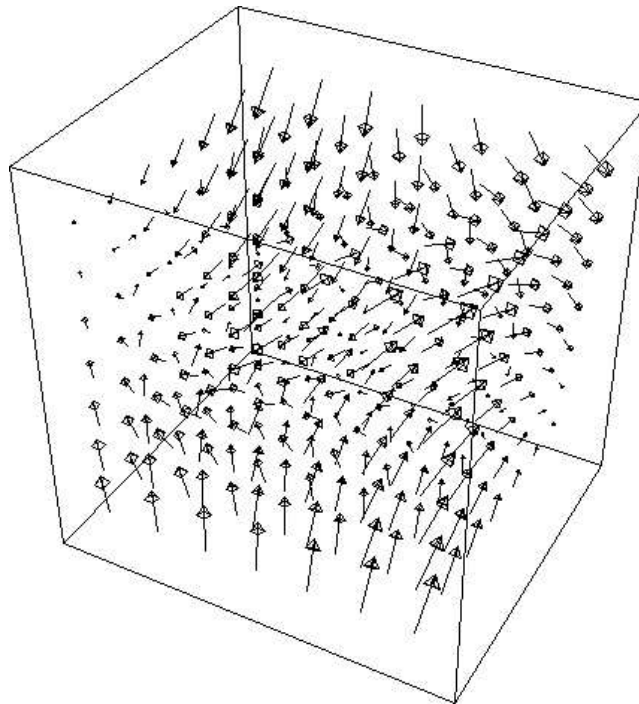
Σχήμα 4.6: Διανυσματική συνάρτηση και η περιστροφή της

Παράδειγμα 4.7

Το διανυσματικό πεδίο $\vec{F}(x, y, z) = (x + z, -y - z, x - y)$ είναι αστρόβιλο σε κάθε σημείο. Πράγματι,

$$\text{rot}\vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = (-1 - (-1))\vec{x}_0 + (1 - 1)\vec{y}_0 + (0 - 0)\vec{z}_0 = \vec{0}$$

Την γραφική παράσταση του πεδίου την βλέπουμε στο Σχήμα 4.7



Σχήμα 4.7: Αστρόβιλο διανυσματικό πεδίο

Βασικές ιδιότητες διανυσματικών συναρτήσεων

Οι παρακάτω ιδιότητες μπορούν εύκολα να αποδειχτούν με βάση τους ορισμούς και στοιχειώδεις πράξεις. Θα συμβολίζουμε με f και g πραγματικές συναρτήσεις ενώ με \vec{F} , \vec{G} και \vec{H} διανυσματικά πεδία. Οι ιδιότητες παραθέτονται και με την βοήθεια του συμβόλου ∇ για πιο εύκολη χρήση και απομνημόνευση.

1. $\operatorname{div}(\vec{F} + \vec{G}) = \operatorname{div}\vec{F} + \operatorname{div}\vec{G}$
2. $\operatorname{rot}(\vec{F} + \vec{G}) = \operatorname{rot}\vec{F} + \operatorname{rot}\vec{G}$
3. $\operatorname{rot}(\operatorname{grad}f) = \nabla \times (\nabla f) = \vec{0}$
4. $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{F}) = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = 0$
5. $\operatorname{div}(f\vec{F}) = f\operatorname{div}\vec{F} + \vec{F} \cdot \operatorname{grad}f$ ή $\nabla \cdot f\vec{F} = f(\nabla \cdot \vec{F}) + \vec{F} \cdot (\nabla f)$
6. $\operatorname{div}(\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \cdot \operatorname{rot}\vec{F} - \vec{F} \cdot \operatorname{rot}\vec{G}$ ή $\nabla \cdot (\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \cdot (\nabla \times \vec{F}) - \vec{F} \cdot (\nabla \times \vec{G})$
7. $\operatorname{rot}(f\vec{F}) = f\operatorname{rot}\vec{F} + \operatorname{grad}f \times \vec{F}$ ή $\nabla \times (f\vec{F}) = f(\nabla \times \vec{F}) + \nabla f \times \vec{F}$
8. $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{F}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{F}) - \nabla^2 \vec{F}$ ή $\nabla \times (\nabla \times \vec{F}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{F}) - \nabla^2 \vec{F}$ όπου

$$\nabla^2 \vec{F} = \nabla^2 (F_1, F_2, F_3) = (\nabla^2 F_1, \nabla^2 F_2, \nabla^2 F_3)$$

$$9. \operatorname{div}(\operatorname{grad}f \times \operatorname{grad}g) = \nabla \cdot (\nabla f \times \nabla g) = 0$$

10. Αν θεωρήσουμε ένα σώμα το οποίο περιστρέφεται γύρω από έναν άξονα με γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$, τότε το κάθε σημείο του σώματος με διάνυσμα θέσης $\vec{r} = (x, y, z)$ θα έχει εφαπτομενική ταχύτητα $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ και επιπλέον θα ισχύει $\operatorname{rot}\vec{v} = 2\vec{\omega}$.

Σημειώστε ότι η ιδιότητα 10, συνδέει την περιστροφή ενός διανυσματικού πεδίου ταχυτήτων με την ταχύτητα στροβιλισμού ή αλλιώς με τον αριθμό στροφών ανά μονάδα χρόνου ενός σώματος σε περιστροφική κίνηση. Στην ιδιότητα 8 βλέπουμε τον τελεστή Laplace ∇^2 να εφαρμόζεται πάνω σε μία διανυσματική συνάρτηση.

Παράδειγμα 4.8

Η ιδιότητα 3 είναι πολύ χρήσιμη όταν θέλουμε να αποδείξουμε ότι ένα διανυσματικό πεδίο δεν είναι συντηρητικό, δηλαδή δεν είναι πεδίο κλίσεων. Ας θεωρήσουμε για το παράδειγμά μας το διανυσματικό πεδίο $\vec{F}(x, y, z) = (y, -x, 0)$. Αν αυτό ήταν πεδίο κλίσης κάποιας συνάρτησης, θα έπρεπε να ισχύει σύμφωνα με την ιδιότητα 3 $\operatorname{rot}\vec{F} = \vec{0}$. Αλλά

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & -x & 0 \end{vmatrix} = -2\vec{z}_0 \neq \vec{0}$$

Επομένως, είναι αδύνατο να είναι πεδίο κλίσεων.

Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο 5

Διπλά ολοκληρώματα

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με την ολοκλήρωση πραγματικών συναρτήσεων δύο μεταβλητών. Θα παρουσιάσουμε την έννοια του διπλού ολοκληρώματος και θα την ερμηνεύσουμε γεωμετρικά σαν όγκο. Ιδιαίτερη σημασία θα δοθεί στις τεχνικές υπολογισμού των διπλών ολοκληρωμάτων είτε με απευθείας ολοκλήρωση είτε με αλλαγή μεταβλητών.

§5.1. Ορισμός του διπλού ολοκληρώματος

Έστω μία συνεχής και φραγμένη συνάρτηση δύο μεταβλητών $f : D \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ όπου το πεδίο ορισμού D είναι ένα ορθογώνιο με πλευρές παράλληλες προς τους άξονες συντεταγμένων. Υποθέτουμε δηλαδή ότι το ορθογώνιο πεδίο ορισμού μπορεί να περιγραφεί πλήρως από δύο κλειστά διαστήματα: $[a, b]$ στον x -άξονα και $[c, d]$ στον y -άξονα (Σχήμα 5.1). Μπορούμε επομένως να γράψουμε

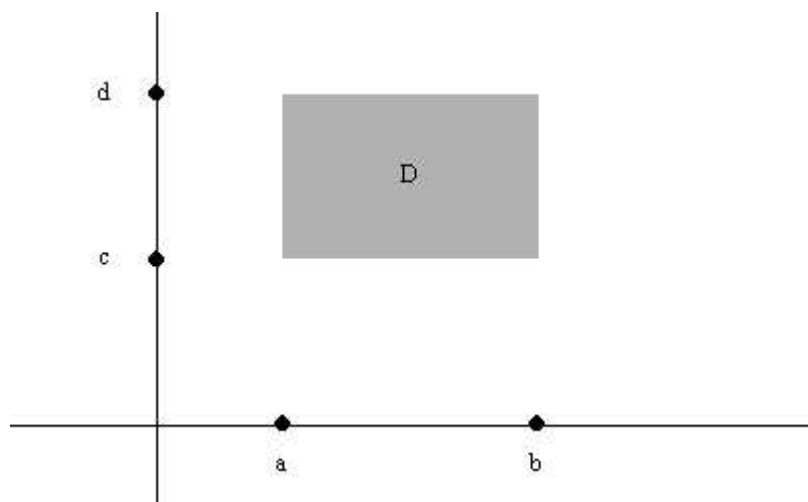
$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

ή πιο απλά

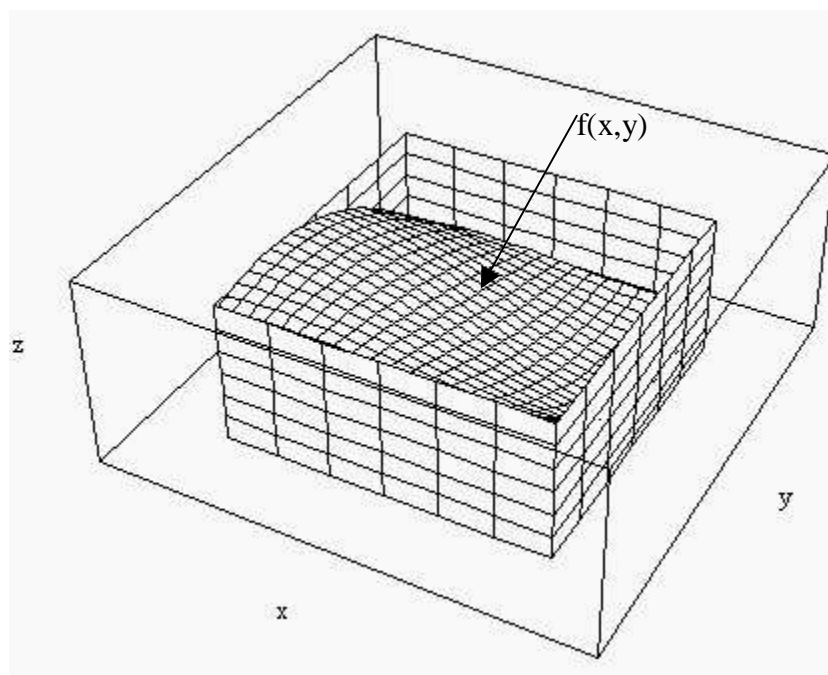
$$D = [a, b] \times [c, d].$$

Θα υποθέσουμε επίσης ότι $f(x, y) \geq 0$ στο D , δηλαδή ότι η γραφική παράσταση της f είναι μια επιφάνεια που βρίσκεται πάνω από το ορθογώνιο D . Η επιφάνεια $z = f(x, y)$ μαζί με τα πέντε επίπεδα $x = a$, $x = b$, $y = c$, $y = d$ και $z = 0$ οριοθετεί ένα στερεό σώμα (Σχήμα 5.2) το οποίο έχει έναν ορισμένο όγκο V . Ο αριθμός V ονομάζεται **διπλό ολοκλήρωμα** της f πάνω από το D και συμβολίζεται

$$V = \iint_D f(x, y) dx dy.$$



Σχήμα 5.1: Ορθογώνια περιοχή στο επίπεδο

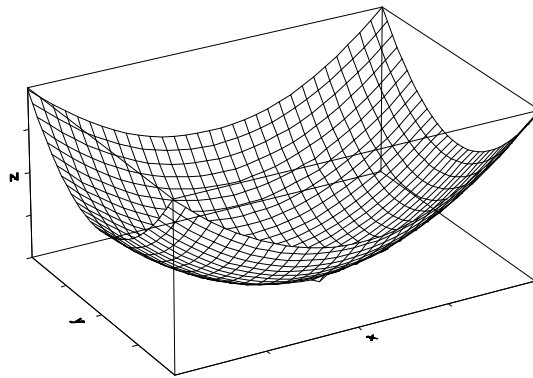


Σχήμα 5.2: Επιφάνεια πάνω από ορθογώνια περιοχή που ορίζει ένα στερεό

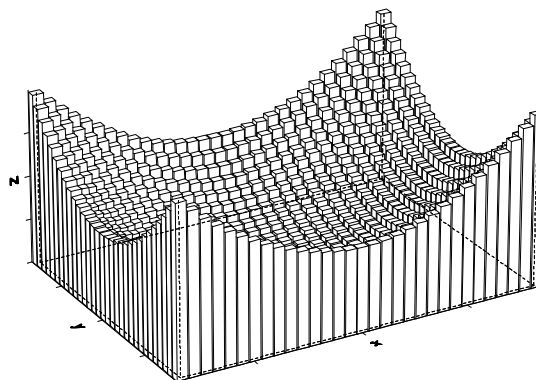
Ο συμβολισμός του διπλού ολοκληρώματος βασίζεται στην εξής μαθηματική θεώρηση: Ο όγκος κάτω από την επιφάνεια $z = f(x, y)$ αποτελείται από άπειρα λεπτά τρισδιάστατα «κουτιά» (Σχήμα 5.3). Το κάθε ένα από αυτά ορθώνεται πάνω από ένα σημείο $(x, y) \in D$, έχει απειροελάχιστο μήκος dx , απειροελάχιστο πλάτος dy και ύψος $f(x, y)$. Ο

όγκος του κάθε κουτιού είναι επομένως ίσος με $f(x,y)dxdy$. Ο συνολικός όγκος V θα είναι το άθροισμα όλων αυτών των απειροελάχιστων όγκων.

Ο ορισμός που δώσαμε για το διπλό ολοκλήρωμα μπορεί εύκολα να επεκταθεί και σε συναρτήσεις που δεν είναι αναγκαστικά θετικές στο D . Στις περιπτώσεις αυτές, το διπλό ολοκλήρωμα ερμηνεύεται σαν το άθροισμα όλων των προσημασμένων όγκων που περιέχονται ανάμεσα στην επιφάνεια $z = f(x,y)$ και στο επίπεδο $z = 0$ και περιορίζονται από τα επίπεδα $x = a$, $x = b$, $y = c$, $y = d$. Αυτό σημαίνει, ότι οι όγκοι που βρίσκονται πάνω από το επίπεδο $z = 0$ συμμετέχουν στο άθροισμα με θετικό πρόσημο ενώ αυτοί που βρίσκονται κάτω από το $z = 0$ με αρνητικό πρόσημο.



(α)



(β)

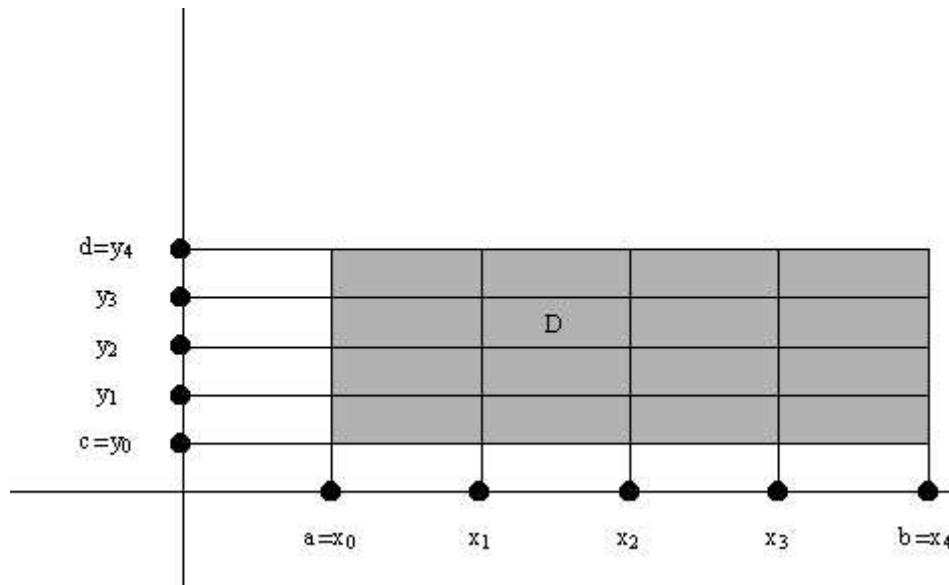
Σχήμα 5.3: (α) Το γράφημα μιας συνάρτησης και
(β) ο όγκος κάτω από την επιφάνεια σαν άθροισμα στοιχειωδών «κουτιών»

Για έναν πιο αυστηρό ορισμό του διπλού ολοκληρώματος στην ορθογώνια περιοχή D , θα θεωρήσουμε μία **κανονική διαμέριση** του D , δηλαδή δύο σύνολα σημείων

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \quad \text{και} \quad c = y_0 < y_1 < \dots < y_n = d$$

τα οποία διαιρούν τα $[a, b]$ και $[c, d]$ σε n ίσα διαστήματα (Σχήμα 5.4), δηλαδή ισχύει

$$\Delta x = x_{k+1} - x_k = \frac{b-a}{n} \quad \text{και} \quad \Delta y = y_{k+1} - y_k = \frac{d-c}{n}.$$



Σχήμα 5.4: Κανονική διαμέριση ορθογώνιας περιοχής D με $n=4$

Με τον τρόπο αυτό, διαιρούμε την ορθογώνια περιοχή D σε n^2 ίσα ορθογώνια που τα συμβολίζουμε

$$D_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}].$$

Αν πάρουμε σε κάθε ένα από αυτά τα ορθογώνια ένα τυχαίο σημείο P_{ij} , τότε το άθροισμα

$$V_n = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} f(P_{ij}) \Delta x \Delta y$$

είναι ένα **άθροισμα Riemann** της f . Αν $\lim_{n \rightarrow \infty} V_n = V \in \mathbf{R}$, και το όριο V είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των σημείων P_{ij} , τότε λέμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη πάνω από το D και συμβολίζουμε

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} V_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} f(P_{ij}) \Delta x \Delta y = \iint_D f(x, y) dx dy.$$

Ιδιότητες

1. Κάθε συνάρτηση συνεχής σε μία ορθογώνια περιοχή D , είναι ολοκληρώσιμη
2. Κάθε συνάρτηση f φραγμένη σε ορθογώνια περιοχή D (υπάρχει δηλαδή $M \in \mathbf{R}$ ώστε $|f(x, y)| \leq M$ για κάθε $(x, y) \in D$), με σημεία ασυνέχειας να σχηματίζουν μία πεπερασμένη ένωση γραφημάτων συνεχών συναρτήσεων, είναι ολοκληρώσιμη στο D .
3. Αν f και g δύο ολοκληρώσιμες συναρτήσεις πάνω από την ορθογώνια περιοχή D και $c \in \mathbf{R}$ μία σταθερά, τότε ισχύουν:

$$\iint_D [f(x, y) + g(x, y)] dx dy = \iint_D f(x, y) dx dy + \iint_D g(x, y) dx dy$$

$$\iint_D cf(x, y) dx dy = c \iint_D f(x, y) dx dy$$

4. Αν $f(x, y) \geq g(x, y)$, τότε $\iint_D f(x, y) dx dy \geq \iint_D g(x, y) dx dy$
5. Αν $D = D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_m$, όπου όλα τα D_i είναι ανά δύο ξένα μεταξύ τους ορθογώνια

($D_i \cap D_j = \emptyset$), τότε $\iint_D f(x, y) dx dy = \sum_{i=1}^m \iint_{D_i} f(x, y) dx dy$ (εννοείται ότι D είναι ορθογώνιο).

6. $\left| \iint_D f(x, y) dx dy \right| \leq \iint_D |f(x, y)| dx dy$

§5.2. Υπολογισμός του διπλού ολοκληρώματος σαν διαδοχικό ολοκλήρωμα

Προφανώς, ο ορισμός του διπλού ολοκληρώματος σαν όριο ακολουθίας διπλών αθροισμάτων που δώσαμε στην προηγούμενη παράγραφο δεν είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθεί σε πρακτικές εφαρμογές, ειδικά όταν η συνάρτηση είναι αρκετά πολύπλοκη. Θα αναφέρουμε λοιπόν έναν τρόπο διαδοχικής ολοκλήρωσης που ουσιαστικά ανάγει τον υπολογισμό του διπλού ολοκληρώματος πάνω από ορθογώνια περιοχή σε υπολογισμό δύο απλών ολοκληρωμάτων.

Έστω λοιπόν ορθογώνια περιοχή $D=[a,b]\times[c,d]$ και $f(x,y)$ συνεχής συνάρτηση στην D . Το διπλό ολοκλήρωμά της, $\iint_D f(x,y)dxdy$, παριστά τον όγκο του στερεού κάτω από την $f(x,y)$. Αν θεωρήσουμε μία διατομή (φέτα) του στερεού από ένα επίπεδο με εξίσωση $x=x_0$, μπορούμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν της $E(x_0)$ από τη σχέση:

$$E(x_0) = \int_c^d f(x_0, y)dy$$

Με τον τρόπο αυτό ορίζεται για κάθε τιμή του $x \in [a,b]$ μία συνάρτηση $E(x) = \int_c^d f(x, y)dy$ που η τιμή της αντιπροσωπεύει το εμβαδόν της διατομής στο κάθε x (Σχήμα 5.5). Είναι λογικό να συμπεράνουμε ότι ο ζητούμενος όγκος V θα προκύψει σαν άθροισμα όλων αυτών των εμβαδών. Θα έχουμε δηλαδή,

$$V = \int_a^b E(x)dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)dy \right] dx.$$

Με όμοιο τρόπο, μπορούμε να θεωρήσουμε διατομές $E(y) = \int_a^b f(x, y)dx$ και να καταλήξουμε στον υπολογισμό του όγκου με τη μορφή

$$V = \int_c^d E(y)dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)dx \right] dy.$$

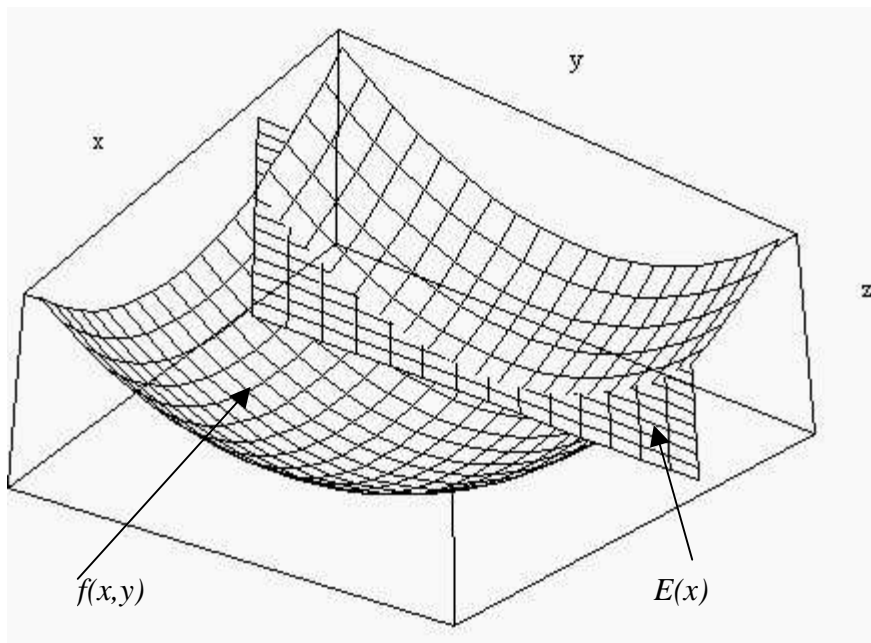
Βέβαια, ο διαισθητικός αυτός τρόπος υπολογισμού του όγκου V μπορεί να τεκμηριωθεί αυστηρά με τη χρήση των αθροισμάτων Riemann και τον ορισμό του ολοκληρώματος σαν όριο ακολουθίας τέτοιων αθροισμάτων. Η απόδειξη ξεφεύγει από τους σκοπούς των σημειώσεων αυτών.

Βλέπουμε λοιπόν ότι ο υπολογισμός του διπλού ολοκληρώματος γίνεται διαδοχικά με τον υπολογισμό δύο απλών ολοκληρωμάτων. Πρώτα διατηρούμε το x σταθερό και υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα της $f(x, y)$ ως προς y και στη συνέχεια ολοκληρώνουμε το αποτέλεσμα ως προς x . Η ίδια διαδικασία μπορεί να γίνει ολοκληρώνοντας πρώτα ως προς x και μετά ως προς y . Μπορούμε δηλαδή να γράψουμε:

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)dy \right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)dx \right] dy.$$

Η κάθε μία από τις παραπάνω εκφράσεις ονομάζεται **διαδοχικό ολοκλήρωμα**. Αν δεν δημιουργείται σύγχυση, συνήθως γράφουμε

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy.$$



Σχήμα 5.5: Συνάρτηση και μία διατομή της

Για να γίνει περισσότερο κατανοητή η διαδοχική ολοκλήρωση, δίνουμε στη συνέχεια μερικά παραδείγματα.

Παράδειγμα 5.1

Έστω η συνάρτηση $f(x, y) = x^2 y$. Θα υπολογίσουμε το διπλό ολοκλήρωμα της f πάνω από την ορθογώνια περιοχή $D = [1, 2] \times [-3, 4]$ (Σχήμα 5.6).

Θα πρέπει να υπολογίσουμε το διαδοχικό ολοκλήρωμα

$$\int_1^2 \int_{-3}^4 x^2 y dy dx.$$

Ολοκληρώνουμε πρώτα ως προς y , δηλαδή υπολογίζουμε το $\int_{-3}^4 x^2 y dy$ κρατώντας το x σταθερό. Έχουμε αρχικά

$$\int_{-3}^4 x^2 y dy = x^2 \int_{-3}^4 y dy = x^2 \frac{y^2}{2} \Big|_{-3}^4 = \frac{7x^2}{2}$$

και στη συνέχεια

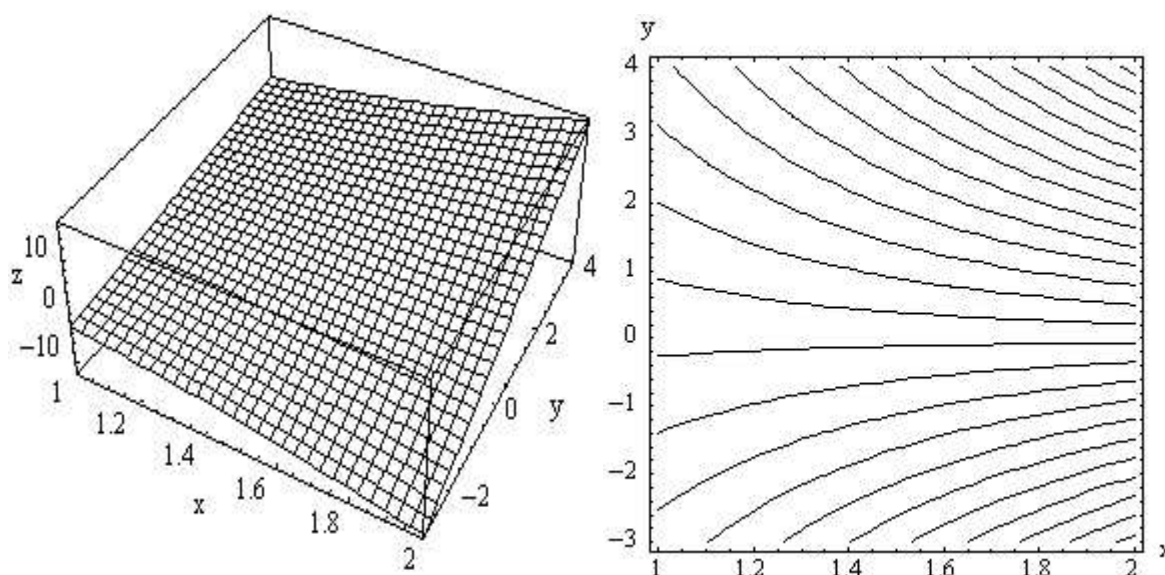
$$\int_1^2 \frac{7x^2}{2} dx = \frac{49}{6}.$$

Άρα τελικά

$$\iint_D x^2 y dD = \frac{49}{6}.$$

Στο ίδιο αποτέλεσμα θα καταλήξουμε αν αλλάξουμε τη σειρά των ολοκληρώσεων ως προς x πρώτα και μετά ως προς y :

$$\iint_D x^2 y dx dy = \int_{-3}^4 \int_1^2 x^2 y dx dy = \int_{-3}^4 \left[y \int_1^2 x^2 dx \right] dy = \int_{-3}^4 \frac{7y}{3} dy = \frac{49}{6}.$$



Σχήμα 5.6: Γράφημα και καμπύλες στάθμης της $f(x, y) = x^2 y$

Παρατήρηση: Αν η συνάρτηση προς ολοκλήρωση είναι της μορφής $f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$, τότε το διπλό ολοκλήρωμα σε ορθογώνια περιοχή μπορεί να βρεθεί απλά:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \left\{ \int_a^b f_1(x) dx \right\} \cdot \left\{ \int_c^d f_2(y) dy \right\}$$

Στο Παράδειγμα 5.1, η συνάρτηση έχει την μορφή αυτή, οπότε μπορούμε να υπολογίσουμε το διπλό ολοκλήρωμα από τη σχέση:

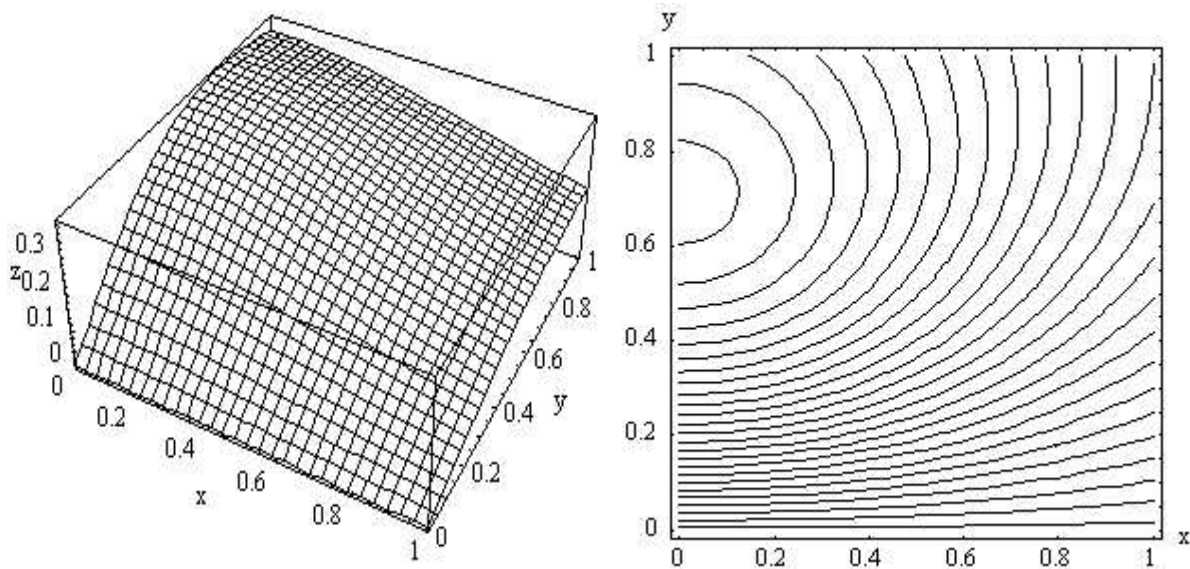
$$\left\{ \int_1^2 x^2 dx \right\} \left\{ \int_{-3}^4 y dy \right\} = \frac{7}{3} \cdot \frac{7}{2} = \frac{49}{6}.$$

Παράδειγμα 5.2

Θα υπολογίσουμε το διπλό ολοκλήρωμα

$$\iint_D \frac{y}{(1+x^2+y^2)^{3/2}} dx dy$$

όπου $D = [0,1] \times [0,1]$, μία τετράγωνη περιοχή (Σχήμα 5.7).



Σχήμα 5.7: Το γράφημα και οι καμπύλες στάθμης της $f(x, y) = \frac{y}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}$.

Θα υπολογίσουμε το διπλό ολοκλήρωμα με τη βοήθεια του διαδοχικού ολοκληρώματος

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 \frac{y}{(1+x^2+y^2)} dy dx &= \int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{y dy}{(1+x^2+y^2)} \right] dx = \int_0^1 \left[-\frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \right]_{y=0}^{y=1} dx = \\ &= -\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2+x^2}} + \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = -\left[\ln|x+\sqrt{x^2+2}| \right]_0^1 + \left[\ln|x+\sqrt{x^2+1}| \right]_0^1 = \ln \left(\frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{2})}{1+\sqrt{3}} \right) \end{aligned}$$

§5.3. Το διπλό ολοκλήρωμα σε γενικότερες περιοχές

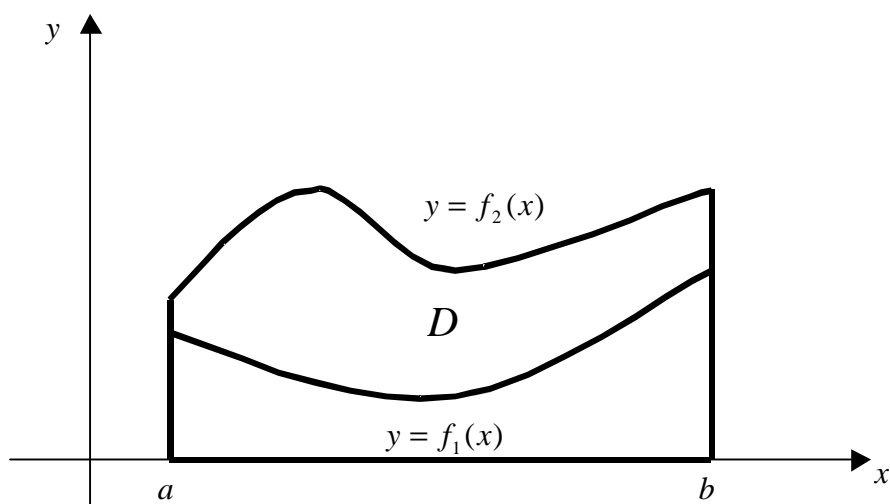
Στα προηγούμενα, ορίσαμε το διπλό ολοκλήρωμα πάνω από ορθογώνια περιοχή και δώσαμε έναν απλό τρόπο υπολογισμού του με τη μορφή διαδοχικού ολοκληρώματος. Θα εξετάσουμε τώρα περιπτώσεις όπου η περιοχή ολοκλήρωσης δεν είναι ορθογώνια, αλλά έχει πιο γενική

μορφή. Συγκεκριμένα, θα ασχοληθούμε με τρεις τύπους περιοχών που φράσσονται από καμπύλες και θα δούμε με ποιον τρόπο τα διπλά ολοκληρώματα πάνω από αυτές ανάγονται επίσης σε διαδοχικά ολοκληρώματα:

Περίπτωση 1η: Η περιοχή ολοκλήρωσης D φράσσεται από δύο πραγματικές συνεχείς συναρτήσεις $f_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ και $f_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $f_1(x) \leq f_2(x)$ για κάθε x στο $[a, b]$. Η περιοχή D είναι δηλαδή το σύνολο

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\}.$$

Μία τέτοια περιοχή φαίνεται στο Σχήμα 5.8.

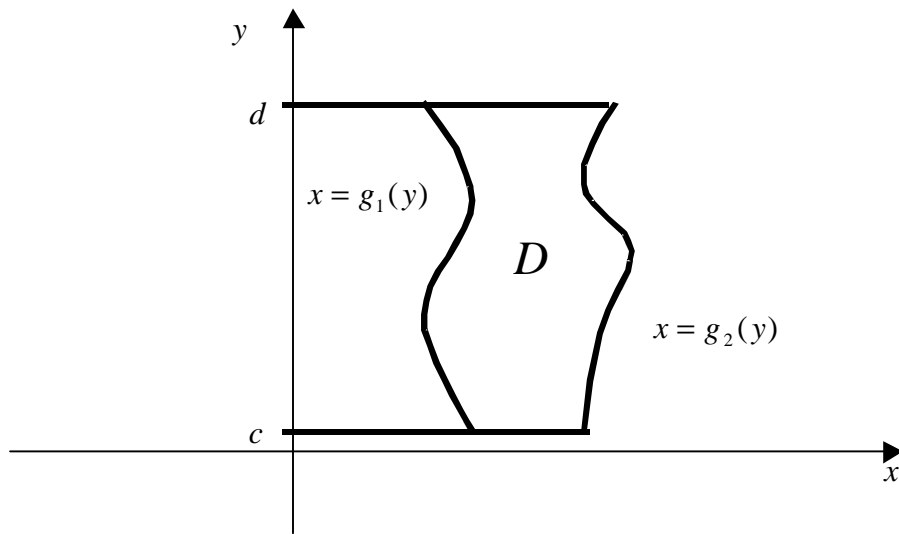


Σχήμα 5.8: Επίπεδη περιοχή ανάμεσα σε δύο καμπύλες τύπου $y = f(x)$

Περίπτωση 2η: Η περιοχή ολοκλήρωσης D φράσσεται από δύο πραγματικές συνεχείς συναρτήσεις $g_1 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ και $g_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $g_1(y) \leq g_2(y)$ για κάθε y στο $[c, d]$. Η περιοχή D είναι δηλαδή το σύνολο

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, g_1(y) \leq x \leq g_2(y)\}.$$

Μία τέτοια περιοχή φαίνεται στο Σχήμα 5.9.



Σχήμα 5.8: Επίπεδη περιοχή ανάμεσα σε δύο καμπύλες τύπου $x = g(y)$

Περίπτωση 3η: Η περιοχή ολοκλήρωσης D μπορεί να εκφραστεί σαν περιοχή που φράσσεται από δύο καμπύλες είτε της μορφής $y = f(x)$ είτε της μορφής $x = g(y)$. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι ο μοναδιαίος κυκλικός δίσκος

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

που μπορούμε να θεωρήσουμε ότι παριστάνεται σαν περιοχή ανάμεσα στις καμπύλες $y = -\sqrt{1-x^2}$ και $y = \sqrt{1-x^2}$ όπου $x \in [-1, 1]$, δηλαδή

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}.$$

Ισοδύναμα όμως μπορούμε να τον περιγράψουμε και με τη μορφή

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : -1 \leq y \leq 1, -\sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{1-y^2}\}.$$

Για να μπορέσουμε να δώσουμε τύπο υπολογισμού διπλού ολοκληρώματος συνάρτησης $f(x, y)$ πάνω από μία περιοχή που ανήκει σε μία από τις τρεις περιπτώσεις που αναφέραμε προηγουμένως, θεωρούμε ένα ορθογώνιο \hat{D} το οποίο περικλείει την περιοχή D . Αν υποθέσουμε ότι η συνάρτηση $f : D \rightarrow \mathbf{R}$ είναι συνεχής, και επομένως φραγμένη, τότε επεκτείνουμε την συνάρτηση f έτσι ώστε να ορίζεται σε όλο το ορθογώνιο με τον εξής τρόπο:

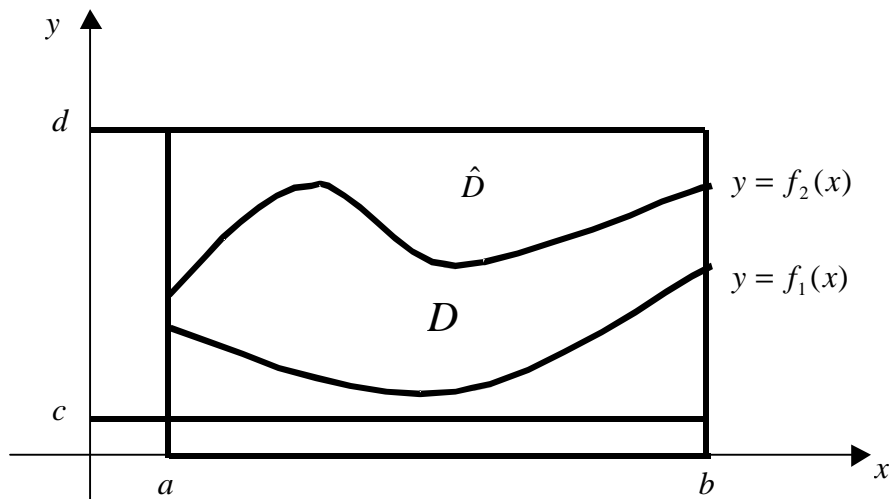
$$\hat{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & (x, y) \in D \\ 0, & (x, y) \in \hat{D} \text{ και } (x, y) \notin D \end{cases}$$

Η νέα συνάρτηση \hat{f} είναι φραγμένη και συνεχής σε όλο το \hat{D} εκτός ίσως από την καμπύλη γύρω από το D η οποία όμως αποτελείται από γραφήματα συνεχών συναρτήσεων και επομένως, σύμφωνα με την Ιδιότητα 2 της §5.1, μπορούμε να ορίσουμε

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{\hat{D}} \hat{f}(x, y) dx dy.$$

Αν $\hat{D} = [a, b] \times [c, d]$, τότε σύμφωνα με τα αποτελέσματα της παραγράφου §5.2,

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{\hat{D}} \hat{f}(x, y) dx dy = \int_a^b \left[\int_c^d \hat{f}(x, y) dy \right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b \hat{f}(x, y) dx \right] dy.$$



Σχήμα 5.9: Περιοχή D της Περίπτωσης 1 και ορθογώνιο \hat{D} που την περικλείει

Αν η περιοχή ολοκλήρωσης D ανήκει στην περίπτωση 1, ορίζεται δηλαδή από τις καμπύλες $f_1(x)$ και $f_2(x)$ (Σχήμα 5.9), και κρατήσουμε σταθερό το x , τότε

$$\begin{aligned} \int_c^d \hat{f}(x, y) dy &= \int_c^{f_1(x)} \hat{f}(x, y) dy + \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \hat{f}(x, y) dy + \int_{f_2(x)}^d \hat{f}(x, y) dy = \\ &= \int_c^{f_1(x)} 0 dy + \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x, y) dy + \int_{f_2(x)}^d 0 dy = \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x, y) dy \end{aligned}$$

Προκύπτει λοιπόν ο τύπος υπολογισμού του διπλού ολοκληρώματος:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left[\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x, y) dy \right] dx$$

Με εντελώς ανάλογο τρόπο προκύπτει και ο τύπος υπολογισμού για τις περιοχές της δεύτερης περίπτωσης που ορίζονται από τις καμπύλες $g_1(y)$ και $g_2(y)$:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \left[\int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x, y) dx \right] dy$$

Στις περιοχές της περίπτωσης 3, μπορούμε να εφαρμόσουμε οποιαδήποτε από τις παραπάνω μεθόδους. Συνήθως, επιλέγουμε αυτήν που θα κρίνουμε ότι οδηγεί σε απλούστερα ολοκληρώματα.

Εδώ πρέπει να σημειώσουμε ότι το διπλό ολοκλήρωμα, πάνω από μία περιοχή D των τύπων που εξετάσαμε, ερμηνεύεται γεωμετρικά σαν όγκος του στερεού που βρίσκεται ανάμεσα στην επιφάνεια – γράφημα της $f(x, y)$ και στην περιοχή D , όπως ακριβώς και στην περίπτωση της ορθογώνιας περιοχής. Στην ειδική περίπτωση που $f(x, y) = 1$, για κάθε $(x, y) \in D$, έχουμε για τις περιοχές των περιπτώσεων 1 και 2 αντίστοιχα:

$$\iint_D dx dy = \int_a^b \left[\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} dy \right] dx = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx = E(D)$$

και

$$\iint_D dx dy = \int_c^d \left[\int_{g_1(y)}^{g_2(y)} dx \right] dy = \int_c^d [g_2(y) - g_1(y)] dy = E(D)$$

όπου $E(D)$ είναι το εμβαδόν της περιοχής D .

Οι ιδιότητες της §5.1, ισχύουν και για τις πιο γενικές περιοχές D . Στο σημείο αυτό θα αναφέρουμε το θεώρημα μέσης τιμής για διπλά ολοκληρώματα που είναι ανάλογο του γνωστού θεωρήματος στον ολοκληρωτικό λογισμό μίας μεταβλητής:

Θεώρημα μέσης τιμής για διπλά ολοκληρώματα: Αν η $f: D \rightarrow \mathbf{R}$ είναι συνεχής σε μία φραγμένη περιοχή (που περικλείεται δηλαδή από μία κλειστή καμπύλη), τότε υπάρχει ένα σημείο $(x_0, y_0) \in D$ για το οποίο ισχύει

$$\iint_D f(x, y) dx dy = f(x_0, y_0) E(D) = f(x_0, y_0) \iint_D dx dy$$

όπου $E(D) = \iint_D dx dy$ είναι το εμβαδόν της περιοχής D . Ο αριθμός

$$f(x_0, y_0) = \frac{1}{E(D)} \iint_D f(x, y) dx dy$$

ονομάζεται μέση τιμή της συνάρτησης f στην περιοχή D .

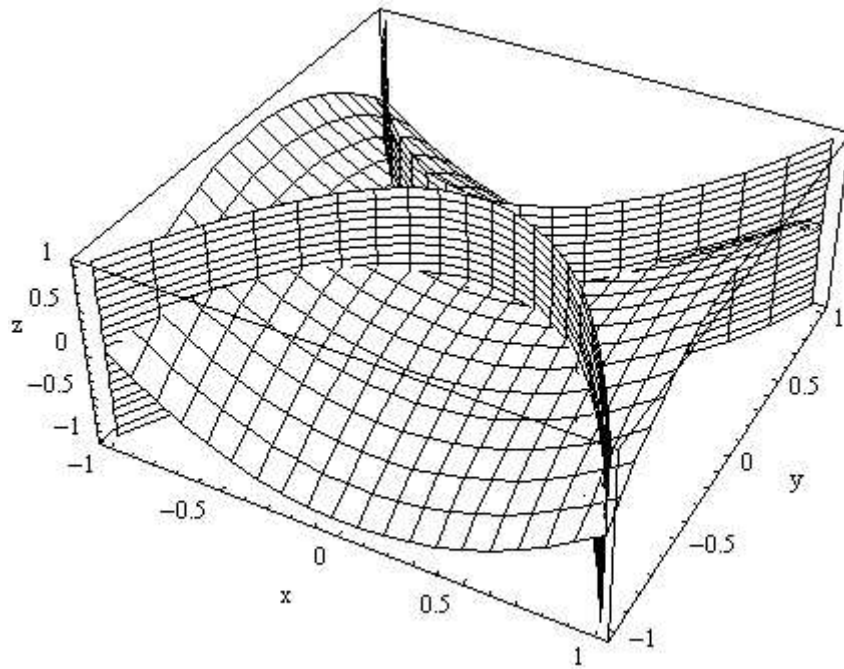
Παράδειγμα 5.3

Θα υπολογίσουμε το διπλό ολοκλήρωμα

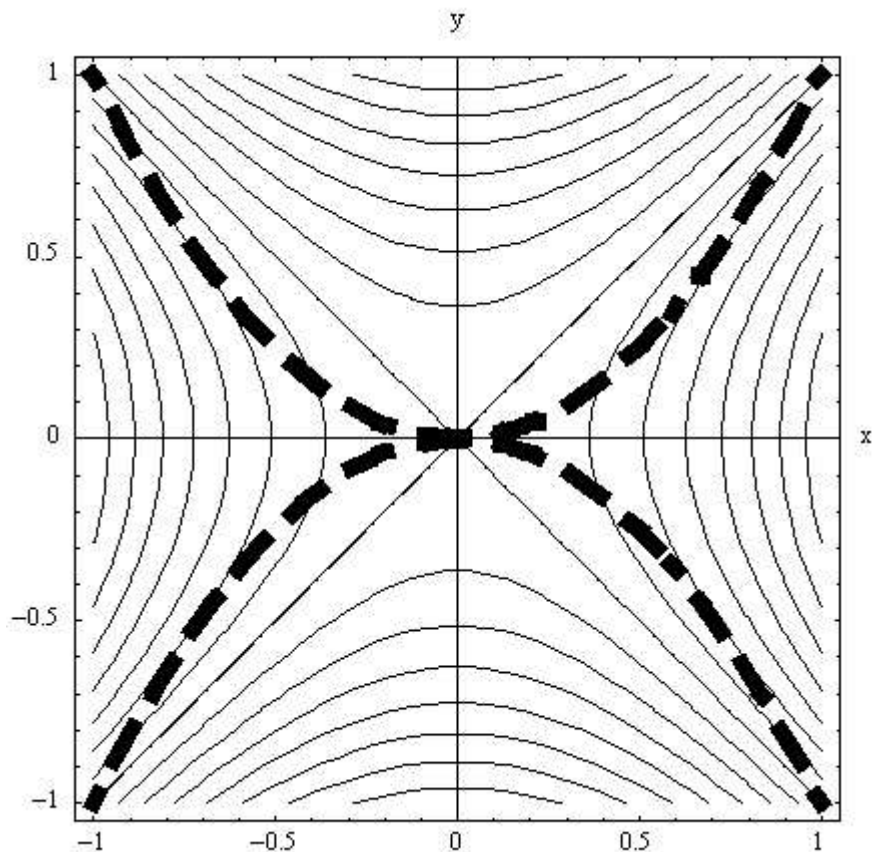
$$\iint_D (x^2 - y^2) dx dy \quad \text{όπου} \quad D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, -x^2 \leq y \leq x^2\}.$$

Στο Σχήμα 5.10 (α) βλέπουμε την επιφάνεια που παριστά το γράφημα της συνάρτησης $f(x, y) = x^2 - y^2$ μαζί με τις δύο επιφάνειες που ορίζουν οι $y = -x^2$ και $y = x^2$. Στο (β) του ίδιου σχήματος βλέπουμε στο επίπεδο την περιοχή ολοκλήρωσης $D = D_1 \cup D_2$ μαζί με τις καμπύλες στάθμης της συνάρτησης. Έχουμε:

$$\begin{aligned} \iint_D (x^2 - y^2) dx dy &= \int_{-1}^1 \left[\int_{-x^2}^{x^2} (x^2 - y^2) dy \right] dx = \int_{-1}^1 \left[x^2 \int_{-x^2}^{x^2} dy - \int_{-x^2}^{x^2} y^2 dy \right] dx = \\ &= \int_{-1}^1 \left[x^2 y \Big|_{y=-x^2}^{y=x^2} - \frac{y^3}{3} \Big|_{y=-x^2}^{y=x^2} \right] dx = \int_{-1}^1 \left(2x^4 - \frac{2}{3} x^6 \right) dx = 2 \frac{x^5}{5} \Big|_{-1}^1 - \frac{2}{3} \frac{x^7}{7} \Big|_{-1}^1 = \frac{64}{105} \end{aligned}$$



(α)



(β)

Σχήμα 5.10: Συνάρτηση σε περιοχή ανάμεσα σε καμπύλες $y = f(x)$

Παράδειγμα 5.4

Θα υπολογίσουμε το διπλό ολοκλήρωμα

$$\iint_D (x+y) dx dy \quad \text{όπου} \quad D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 1 \leq x \leq \sqrt{4-y}, \quad 0 \leq y \leq 3\}.$$

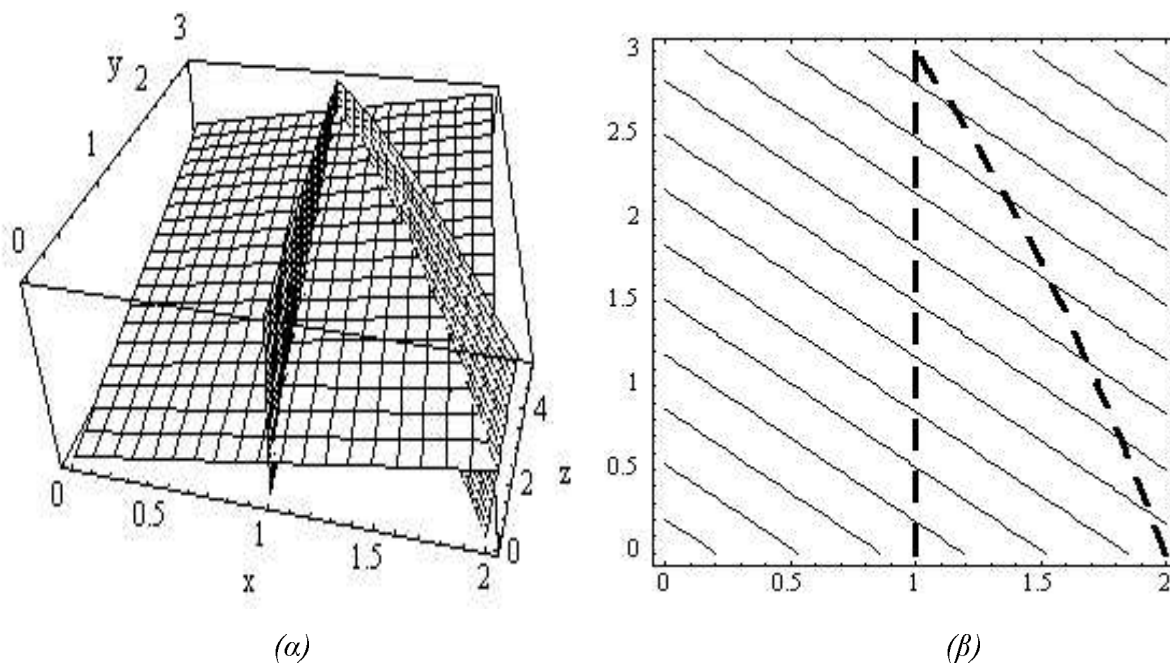
Εδώ, θα ολοκληρώσουμε πρώτα ως προς x και στη συνέχεια ως προς y . Έχουμε δηλαδή

$$\begin{aligned} \iint_D (x+y) dx dy &= \int_0^3 \left[\int_1^{\sqrt{4-y}} (x+y) dx \right] dy = \int_0^3 \left[\int_1^{\sqrt{4-y}} x dx + y \int_1^{\sqrt{4-y}} dx \right] dy = \\ &= \int_0^3 \left[\frac{x^2}{2} \Big|_{x=1}^{x=\sqrt{4-y}} + yx \Big|_{x=1}^{x=\sqrt{4-y}} \right] dy = \int_0^3 \left[\frac{3}{2}(1-y) + y\sqrt{4-y} \right] dy = \frac{241}{60} \end{aligned}$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι το ίδιο ολοκλήρωμα μπορεί να υπολογιστεί αν εκφράσουμε την περιοχή ολοκλήρωσης σαν

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 1 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq 4-x^2\}.$$

Στο Σχήμα 5.11 βλέπουμε στο (α) το επίπεδο $f(x, y) = x + y$ μαζί με το επίπεδο $x = 1$ και την επιφάνεια $x = \sqrt{4 - y}$ ενώ στο (β) την περιοχή ολοκλήρωσης D μαζί με τις καμπύλες στάθμης (ευθείες).



Σχήμα 5.11: Συνάρτηση σε περιοχή ανάμεσα σε καμπύλες $x = f(y)$

Τα διπλά ολοκληρώματα πάνω από περιοχή D που ανήκει στην περίπτωση 3, μπορούν να περιγραφούν είτε με τη μορφή

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : a \leq x \leq b, f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\}$$

είτε με τη μορφή

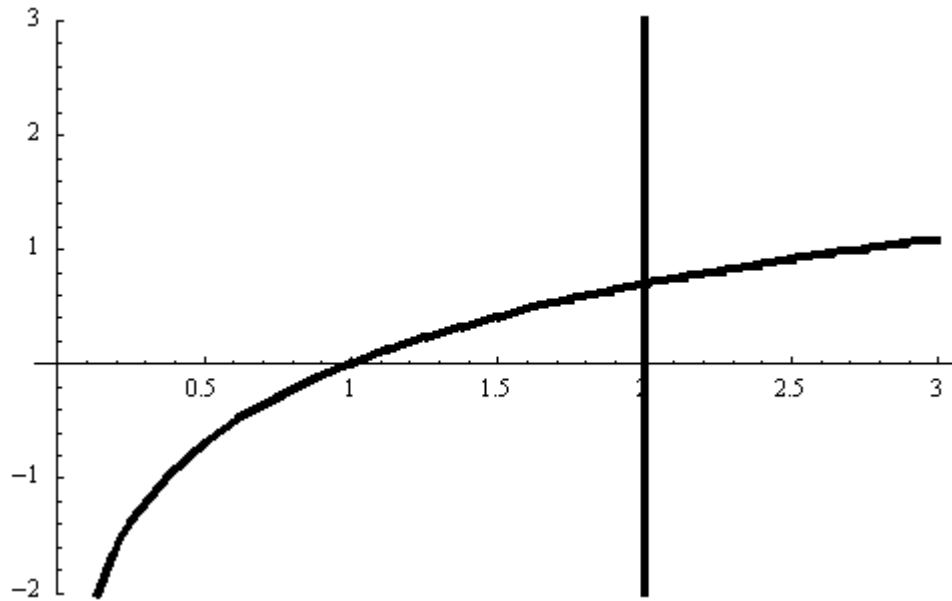
$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : g_1(y) \leq x \leq g_2(y), c \leq y \leq d\}.$$

Αυτή η ιδιότητα κάποιων περιοχών μας επιτρέπει να εφαρμόσουμε την τεχνική που ονομάζεται **αλλαγή της σειράς ολοκλήρωσης**. Αν δηλαδή κάποιο διαδοχικό ολοκλήρωμα είναι δύσκολο να υπολογιστεί, αλλάζουμε την σειρά ολοκλήρωσης και εξετάζουμε αν το νέο διαδοχικό ολοκλήρωμα είναι πιο απλό.

Παράδειγμα 5.5

Θα εφαρμόσουμε την τεχνική της αλλαγής σειράς ολοκλήρωσης στο διπλό ολοκλήρωμα

$$\iint_D (x-1)\sqrt{1+e^{2y}} dx dy \quad \text{όπου} \quad D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 1 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq \ln x\}.$$



Σχήμα 5.12: Η περιοχή ολοκλήρωσης του Παραδείγματος 5.5

Η σειρά με την οποία δίνεται το διαδοχικό ολοκλήρωμα δηλαδή,

$$\int_1^2 \left[\int_0^{\ln x} (x-1)\sqrt{1+e^{2y}} dy \right] dx = \int_1^2 \left[(x-1) \int_0^{\ln x} \sqrt{1+e^{2y}} dy \right] dx$$

παρουσιάζει δυσκολία στον υπολογισμό του. Η περιοχή ολοκλήρωσης D (Σχήμα 5.12) μπορεί να εκφραστεί και με τη μορφή

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : e^y \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq \ln 2\}$$

και επομένως το δοσμένο διαδοχικό ολοκλήρωμα γίνεται

$$\begin{aligned} \int_0^{\ln 2} \left[\int_{e^y}^2 (x-1)\sqrt{1+e^{2y}} dx \right] dy &= \int_0^{\ln 2} \sqrt{1+e^{2y}} \left[\int_{e^y}^2 (x-1) dx \right] dy = \int_0^{\ln 2} \sqrt{1+e^{2y}} \left[\frac{x^2}{2} - x \right]_{x=e^y}^{x=2} dy = \\ &= \int_0^{\ln 2} \sqrt{1+e^{2y}} \left(\frac{e^{2y}}{2} - e^y \right) dy = -\frac{1}{2} \int_0^{\ln 2} e^{2y} \sqrt{1+e^{2y}} dy + \int_0^{\ln 2} e^y \sqrt{1+e^{2y}} dy \end{aligned}$$

Τα δυο τελευταία ολοκληρώματα υπολογίζονται εύκολα αν θέσουμε $u = e^{2y}$ στο πρώτο και $u = e^y$ στο δεύτερο. Με αυτές τις αντικαταστάσεις θα έχουμε

$$-\frac{1}{4} \int_1^4 \sqrt{1+u} du + \int_0^{\ln 2} \sqrt{1+u^2} du.$$

Αλλά

$$\int \sqrt{1+u} du = \frac{2}{3}(1+u^{3/2}) + c$$

και

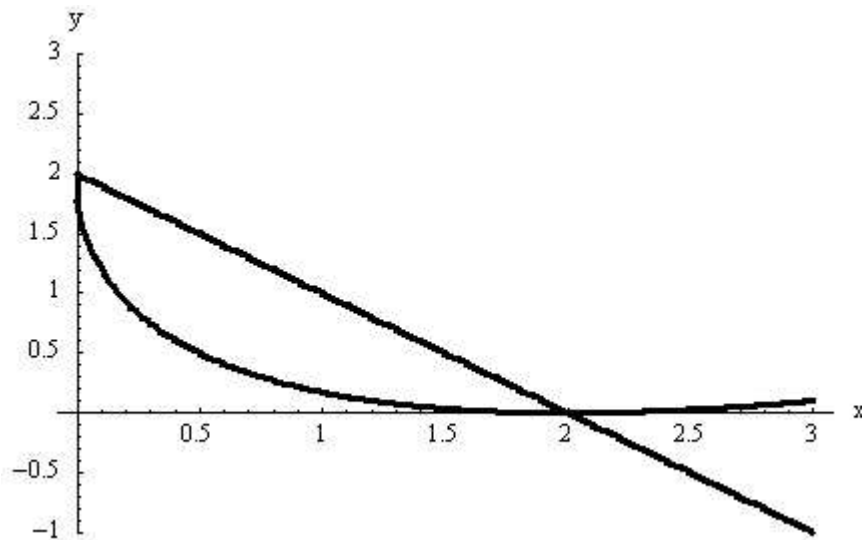
$$\int \sqrt{1+u^2} du = \frac{1}{2} \left[u\sqrt{1+u^2} + \ln \left| u + \sqrt{1+u^2} \right| \right] + c \quad (\text{από πίνακες}).$$

Τελικά, μετά από τον υπολογισμό των ορισμένων ολοκληρωμάτων, το αποτέλεσμα θα είναι

$$\frac{1}{2} \left(2\sqrt{5} - \sqrt{2} + \ln \frac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}} \right) - \frac{1}{6} (5\sqrt{5} - 2\sqrt{2}).$$

Παράδειγμα 5.6

Θα υπολογίσουμε με τη βοήθεια διπλού ολοκληρώματος, το εμβαδόν της περιοχής D που φράσσεται από την καμπύλη $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2}$ και την ευθεία $x + y = 2$.



Σχήμα 5.13: Η περιοχή ολοκλήρωσης του Παραδείγματος 5.6

Η περιοχή ολοκλήρωσης (Σχήμα 5.13) μπορεί να εκφραστεί σαν

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, (\sqrt{2} - \sqrt{x})^2 \leq y \leq 2 - x \right\}.$$

Επομένως, το εμβαδόν θα είναι:

$$E(D) = \iint_D dx dy = \int_0^1 \left[\int_{(\sqrt{2}-\sqrt{x})^2}^{2-x} dy \right] dx = \int_0^1 \left[y \Big|_{(\sqrt{2}-\sqrt{x})^2}^{2-x} \right] dx = 2 \int_0^1 (\sqrt{2x} - x) dx = \frac{4}{3}$$

§5.4. Υπολογισμός του διπλού ολοκληρώματος με αλλαγή μεταβλητών

Ο υπολογισμός των διπλών ολοκληρωμάτων σαν διαδοχικά ολοκληρώματα παρουσιάζει σε αρκετές περιπτώσεις δυσκολίες που είναι δυνατό να οφείλονται είτε στην μορφή της συνάρτησης που ολοκληρώνεται, είτε στην περιοχή του επιπέδου πάνω από την οποία γίνεται η ολοκλήρωση. Ειδικά όταν η περιοχή D δεν ανήκει σε κάποια από τις συνηθισμένες περιπτώσεις που περιγράψαμε στην §5.3, είμαστε αναγκασμένοι να καταφύγουμε σε τεχνικές μετασχηματισμών των μεταβλητών μας, όπως ακριβώς κάνουμε και για τα απλά ολοκληρώματα.

Στην παράγραφο αυτή, θα εξετάσουμε αρχικά τις απεικονίσεις υποσυνόλων του \mathbf{R}^2 σε άλλα υποσύνολα του \mathbf{R}^2 και στη συνέχεια θα αναφέρουμε τον γενικό τύπο αλλαγής μεταβλητών σε ένα διπλό ολοκλήρωμα. Μία ειδική περίπτωση που θα μας απασχολήσει είναι η αλλαγή σε πολικές συντεταγμένες.

Υποθέτουμε λοιπόν ότι έχουμε μία συνάρτηση $G: D^* \rightarrow \mathbf{R}^2$, όπου $D^* \subset \mathbf{R}^2$, η οποία είναι. συνεχής και παραγωγίσιμη. Η G είναι δηλαδή **απεικόνιση** των σημείων του D^* σε κάποια άλλα σημεία του \mathbf{R}^2 . Το σύνολο των εικόνων του D^* θα το συμβολίζουμε $D = G(D^*)$. Μπορούμε επίσης να θεωρήσουμε ότι μία τέτοια απεικόνιση είναι ένας **μετασχηματισμός** του συνόλου D^* . Ένας βολικός τρόπος για να εργαζόμαστε με μετασχηματισμούς και να τους εφαρμόζουμε στα διπλά ολοκληρώματα, είναι να συμβολίζουμε τα σημεία του D με (x, y) ενώ τα σημεία του D^* με (u, v) . Υποθέτουμε δηλαδή ότι ισχύει

$$(x, y) = G(u, v) \quad \text{ή} \quad x = x(u, v) \quad \text{και} \quad y = y(u, v).$$

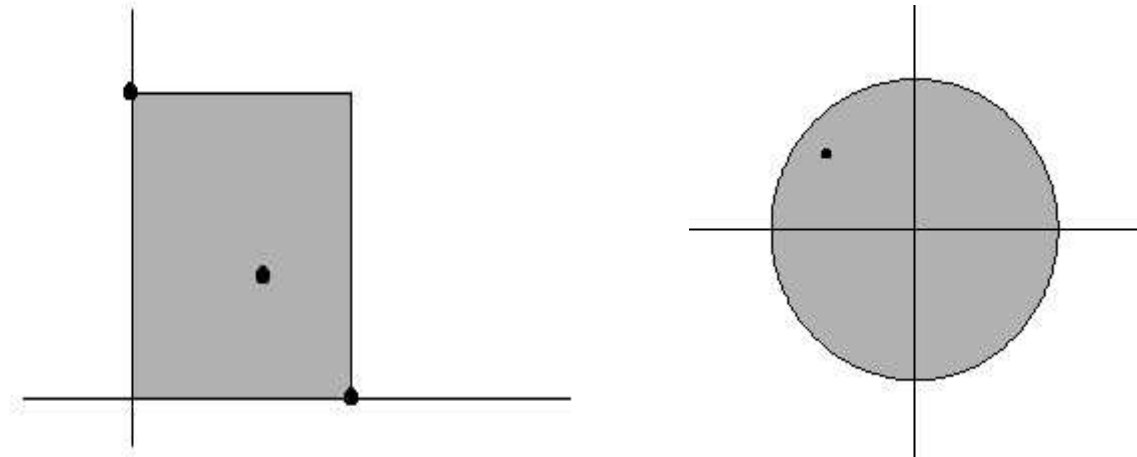
Παράδειγμα 5.7

Αν $D^* = [0, 1] \times [0, 2\pi]$ τότε μπορούμε να συμβολίσουμε τα σημεία του D^* με ζεύγη της μορφής (r, θ) όπου $0 \leq r \leq 1$ και $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Η συνάρτηση

$$(x, y) = G(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

είναι ο γνωστός μετασχηματισμός από πολικές σε Καρτεσιανές συντεταγμένες και έχει την ιδιότητα να απεικονίζει την ορθογώνια περιοχή D^* στον μοναδιαίο κυκλικό δίσκο D (Σχήμα 5.14). Πράγματι,

$$x^2 + y^2 = r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta = r^2 \leq 1.$$



Σχήμα 5.14: Απεικόνιση ορθογώνιας περιοχής (πολικές συντεταγμένες) σε κυκλικό δίσκο (Καρτεσιανές συντεταγμένες)

Παράδειγμα 5.8

Έστω η συνάρτηση $G(u,v) = \left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2} \right) = (x,y)$ και $D^* = [-1,1] \times [-1,1]$ η τετράγωνη περιοχή με κέντρο το $(0,0)$ και πλευρά μήκους 2. Θα προσδιορίσουμε την εικόνα του D^* εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό G . Η περιοχή D^* ορίζεται από τις ευθείες

$$u = -1, \quad u = 1, \quad v = -1, \quad v = 1$$

οι οποίες με την παραμετρική τους μορφή γράφονται αντίστοιχα:

$$\vec{r}_1^*(t) = (-1, t), \quad \vec{r}_2^*(t) = (1, t), \quad \vec{r}_3^*(t) = (t, -1), \quad \vec{r}_4^*(t) = (t, 1).$$

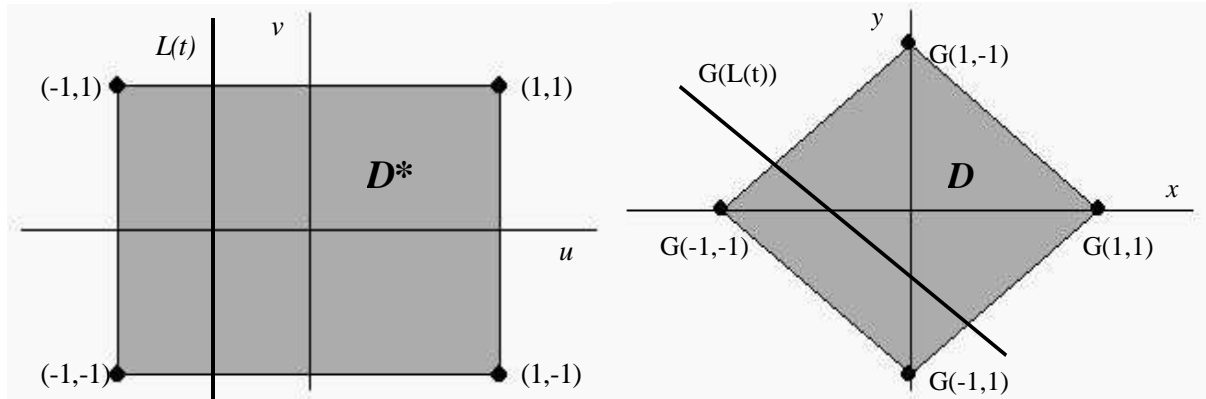
Η εφαρμογή της G επάνω τους έχει σαν αποτέλεσμα τις ευθείες με παραμετρικές εξισώσεις

$$\vec{r}_1(t) = \left(\frac{-1+t}{2}, \frac{-1-t}{2} \right), \quad \vec{r}_2(t) = \left(\frac{1+t}{2}, \frac{1-t}{2} \right), \quad \vec{r}_3(t) = \left(\frac{t-1}{2}, \frac{t+1}{2} \right), \quad \vec{r}_4(t) = \left(\frac{t+1}{2}, \frac{t-1}{2} \right).$$

Με απαλοιφή του t παίρνουμε τις αντίστοιχες εξισώσεις των ευθειών:

$$y = -x - 1, \quad y = -x + 1, \quad y = x + 1, \quad y = x - 1.$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι η συνάρτηση G αναποδογυρίζει και στρέφει το τετράγωνο D^* και το μεταφέρει σε ένα νέο τετράγωνο D με κορυφές τα σημεία $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$, $(0,-1)$ (Σχήμα 5.15).



Σχήμα 5.15: Τετράγωνη περιοχή D^* και ο μετασχηματισμός της, $D = G(D^*)$

Βέβαια, αν θέλουμε να δόσουμε μια πιο αυστηρή απόδειξη, θα πρέπει να θεωρήσουμε τυχαία ευθεία με παραμετρική εξίσωση

$$L(t) = (c, t), \quad \text{όπου } c \in [-1, 1] \text{ σταθερό και } t \in [-1, 1].$$

Η εικόνα της ευθείας αυτής κάτω από τον μετασχηματισμό G είναι

$$G(L(t)) = \left(\frac{c+t}{2}, \frac{c-t}{2} \right).$$

Αυτή όμως είναι η παραμετρική εξίσωση της ευθείας $y = -x + c$ και επομένως όσο το c κινείται από -1 μέχρι 1 , η ευθεία $L(t)$ σαρώνει το τετράγωνο D^* ενώ η ευθεία $G(L(t))$ σαρώνει το τετράγωνο D .

Γενικά για τις περιοχές που περικλείονται από παραλληλόγραμμα ισχύει:

Οι γραμμικές απεικονίσεις της μορφής

$$G(u, v) = (x, y) = (au + bv, cu + dv)$$

μετασχηματίζουν παραλληλόγραμμα σε παραλληλόγραμμα και κορυφές σε κορυφές.

Η ιδιότητα αυτή μας επιτρέπει να βρίσκουμε απλά τις εικόνες των κορυφών ενός παραλληλογράμμου και να τις συνδέουμε με ευθύγραμμα τμήματα.

Μία απεικόνιση G είναι **ένα προς ένα** στο D^* αν δύο οποιαδήποτε διαφορετικά σημεία του D^* δεν είναι δυνατό να έχουν την ίδια εικόνα. Η απεικόνιση G είναι **επί** του D αν κάθε σημείο του D είναι εικόνα ενός τουλάχιστον σημείου του πεδίου ορισμού D^* . Οι δύο αυτοί ορισμοί είναι χρήσιμοι στην επίλυση του προβλήματος της εύρεσης του αντίστροφου μετασχηματισμού. Αν δηλαδή δίνεται το D και μία απεικόνιση G , θέλουμε να εντοπίσουμε το D^* για το οποίο $D = G(D^*)$. Αν η απεικόνιση είναι ένα προς ένα και επί, το πρόβλημα έχει μοναδική λύση.

Έστω $G: D^* \subseteq \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ ένας μετασχηματισμός που δίνεται από τις σχέσεις

$$x = x(u, v) \quad \text{και} \quad y = y(u, v).$$

Η **Ιακωβιανή ορίζουσα** του G ορίζεται

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

και μας δίνει ένα μέτρο της μεταβολής που ένας μετασχηματισμός επιφέρει στα εμβαδά.

Μπορούμε τώρα να διατυπώσουμε το **θεώρημα της αλλαγής μεταβλητών**:

Έστω D και D^* περιοχές του επιπέδου που περικλείονται από κλειστές καμπύλες και $G: D^* \rightarrow D$ μια απεικόνιση συνεχής και παραγωγίσιμη. Υποθέτουμε ακόμη, ότι η G είναι ένα προς ένα στο D^* . Τότε, για κάθε ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f: D \rightarrow \mathbf{R}$ ισχύει:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D^*} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right| du dv$$

Η σωστή επιλογή του μετασχηματισμού οδηγεί σε ολοκληρώματα που είναι απλούστερα από το αρχικό. Σε κάθε περίπτωση, είναι δυνατόν να χρειαστούν αρκετές δοκιμές μέχρι να βρεθεί ο κατάλληλος μετασχηματισμός. Σε αρκετές περιπτώσεις (π.χ. κυκλικές περιοχές) η αλλαγή σε πολικές συντεταγμένες είναι μία αποτελεσματική επιλογή. Για την ειδική αυτή περίπτωση, έχουμε

$$x = r \cos \theta \quad \text{και} \quad y = r \sin \theta$$

και άρα

$$\frac{D(x, y)}{D(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r.$$

Έτσι, ο τύπος αλλαγής σε πολικές συντεταγμένες γίνεται:

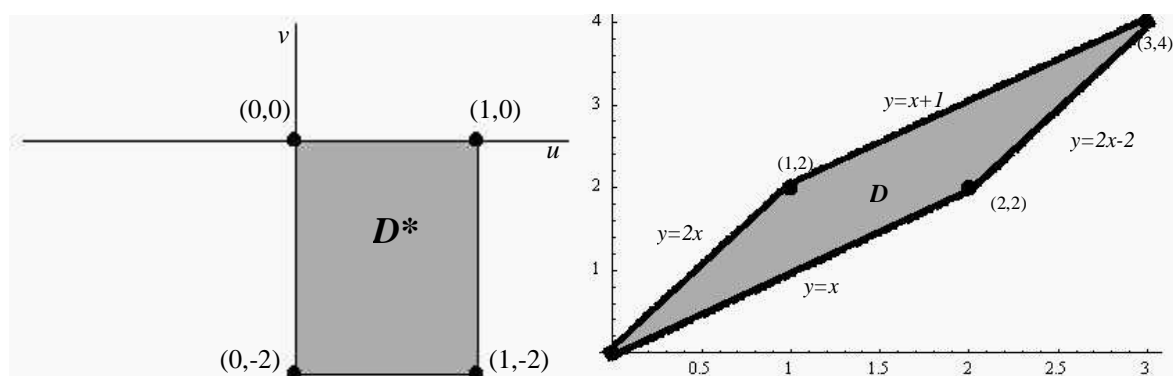
$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D^*} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

Παράδειγμα 5.9

Θα υπολογίσουμε το διπλό ολοκλήρωμα

$$\iint_D xy dx dy$$

όπου D είναι η περιοχή του επιπέδου που περικλείεται από τις ευθείες $y = 2x$, $y = 2x - 2$, $y = x$, $y = x + 1$.



Σχήμα 5.16: Η περιοχή ολοκλήρωσης του Παραδείγματος 5.9

Η αλλαγή μεταβλητών θα γίνει με την εφαρμογή του μετασχηματισμού G :

$$(x, y) = G(u, v) = (u - v, 2u - v).$$

Ο μετασχηματισμός είναι ένα προς ένα και μπορούμε να δούμε εύκολα, λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων $x = u - v$ και $y = 2u - v$ ως προς u και v διαδοχικά για τις τιμές $(x, y) = (0, 0)$, $(1, 2)$, $(3, 4)$ και $(2, 2)$, ότι η περιοχή D^* θα είναι το ορθογώνιο που ορίζεται από τα αντίστοιχα σημεία $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, -2)$ και $(2, 2)$ (Σχήμα 5.16). Επίσης,

$$\left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right| = \left| \det \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \right| = 1$$

και άρα σύμφωνα με το θεώρημα αλλαγής μεταβλητών θα έχουμε:

$$\iint_D xy dx dy = \iint_{D^*} (u - v)(2u - v) du dv = \int_{-2}^0 \left[\int_0^1 (2u^2 - 3uv + v^2) du \right] dv = \int_{-2}^0 \left[\frac{2}{3} - \frac{3}{2}v + v^2 \right] dv = 7.$$

Παράδειγμα 5.10

Θα υπολογίσουμε το διπλό ολοκλήρωμα

$$\iint_D (x^2 + y^2)^2 dx dy,$$

όπου D είναι ο δακτύλιος ανάμεσα στους κύκλους $x^2 + y^2 = 1$ και $x^2 + y^2 = 4$.

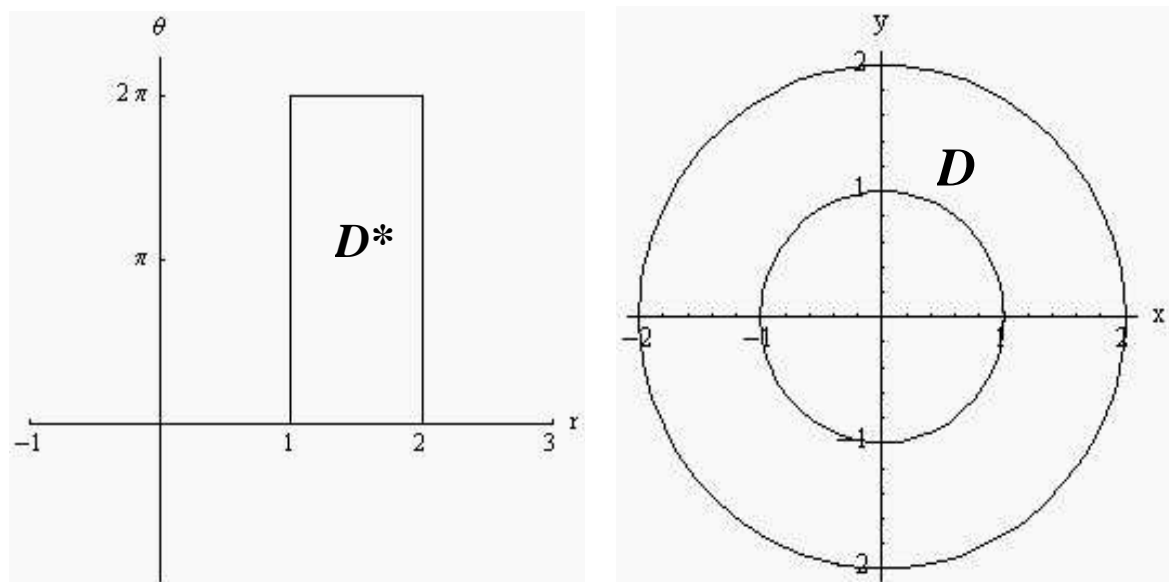
Οι δύο κύκλοι εκφράζονται σε πολικές συντεταγμένες με τις απλές εξισώσεις $r=1$ και $r=2$. Ακόμη και η συνάρτηση που θα ολοκληρώσουμε έχει απλούστερη μορφή αφού $(x^2 + y^2)^2 = r^4$. Για να απλοποιήσουμε λοιπόν και την περιοχή ολοκλήρωσης αλλά και τη συνάρτηση, επιλέγουμε να εργαστούμε με πολικές συντεταγμένες. Η νέα περιοχή ολοκλήρωσης θα είναι

$$D^* = \{(r, \theta) \in \mathbf{R}^2 : 1 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta < 2\pi\},$$

δηλαδή μία ορθογώνια περιοχή. Έχουμε λοιπόν

$$\iint_D (x^2 + y^2)^2 dx dy = \iint_{D^*} r^4 r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\int_1^2 r^5 dr \right] d\theta = \frac{63}{6} \int_0^{2\pi} d\theta = 21\pi.$$

Η αρχικά δοσμένη περιοχή ολοκλήρωσης D και η περιοχή ολοκλήρωσης μετά την αλλαγή μεταβλητών σε πολικές συντεταγμένες D^* δίνονται στο Σχήμα 5.17.



Σχήμα 5.17: Η περιοχή ολοκλήρωσης του Παραδείγματος 5.10
σε πολικές και Καρτεσιανές συντεταγμένες

§5.5. Εφαρμογές του διπλού ολοκληρώματος

Έχουμε ήδη αναφέρει κάποιες από τις εφαρμογές του διπλού ολοκληρώματος στον υπολογισμό του όγκου, του εμβαδού επίπεδης περιοχής και της μέσης τιμής συνάρτησης. Στην παράγραφο αυτή θα συνοψίσουμε επιγραμματικά τις εφαρμογές αυτές αναφέροντας και μερικές ακόμη από την Φυσική και την Μηχανική.

1. **Όγκος** στερεού που ορίζεται από επιφάνεια $f(x, y)$ και επίπεδη περιοχή D :

$$V = \iint_D |f(x, y)| dx dy$$

2. **Όγκος** στερεού ανάμεσα στις επιφάνειες $f(x, y)$ και $g(x, y)$ πάνω από την επίπεδη περιοχή D :

$$V = \iint_D |f(x, y) - g(x, y)| dx dy$$

3. **Εμβαδόν** επίπεδης περιοχής D :

$$E(D) = \iint_D dx dy$$

4. **Εμβαδόν επιφάνειας** S που δίνεται στην μορφή $z = f(x, y)$ πάνω από την επίπεδη περιοχή D :

$$E(S) = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy$$

5. **Μέση τιμή** συνάρτησης $f(x, y)$ στην επίπεδη περιοχή D :

$$\text{mean}(f) = \frac{\iint_D f(x, y) dx dy}{\iint_D dx dy}$$

6. **Μάζα** μίας διδιάστατης "πλάκας" D με συνάρτηση πυκνότητας $\rho(x, y)$:

$$M = \iint_D \rho(x, y) dx dy$$

Να διευκρινίσουμε στο σημείο αυτό ότι θεωρούμε την επίπεδη περιοχή D σαν σώμα που έχει μάζα (βάρος) αλλά ο όγκος της είναι αμελητέος. Επιπλέον, η πυκνότητα του υλικού σε κάθε σημείο (x, y) είναι συνάρτηση των συντεταγμένων αυτών.

7. Συντεταγμένες του **κέντρου μάζας** επίπεδης περιοχής D με πυκνότητας $\rho(x, y)$:

$$\bar{x} = \frac{\iint_D x\rho(x, y)dx dy}{\iint_D \rho(x, y)dx dy}, \quad \bar{y} = \frac{\iint_D y\rho(x, y)dx dy}{\iint_D \rho(x, y)dx dy}$$

Το κέντρο μάζας είναι το σημείο εκείνο στο οποίο αν στηριχτεί η επίπεδη πλάκα θα ισορροπήσει. Αν η πυκνότητα είναι σταθερή, δηλαδή $\rho(x, y) = c \in \mathbf{R}$ για κάθε $(x, y) \in D$, τότε ομιλούμε για **κέντρο βάρους** με συντεταγμένες

$$\bar{x} = \frac{\iint_D x dx dy}{\iint_D dx dy}, \quad \bar{y} = \frac{\iint_D y dx dy}{\iint_D dx dy}$$

8. **Ροπή αδράνειας** της επίπεδης περιοχής D με πυκνότητα $\rho(x, y)$ ως προς

$$(\alpha) \text{ την αρχή } (0,0): I_0 = \iint_D (x^2 + y^2)\rho(x, y)dx dy$$

$$(\beta) \text{ τον άξονα } Ox: I_x = \iint_D y^2 \rho(x, y)dx dy$$

$$(\gamma) \text{ τον άξονα } Oy: I_y = \iint_D x^2 \rho(x, y)dx dy$$

Αν θεωρήσουμε τη μάζα ενός σώματος σαν μέτρο ανταπόκρισης του σώματος σε μία μεταφορική κίνηση, η ροπές αδράνειας είναι μέτρα ανταπόκρισης του σώματος σε περιστροφικές κινήσεις. Η ανταπόκριση αυτή εξαρτάται από το σχήμα του σώματος και όχι μόνο από την μάζα του.

Παράδειγμα 5.11

Θα υπολογίσουμε με διπλή ολοκλήρωση τον όγκο του στερεού που περικλείεται από τις επιφάνειες

$$z = x^2 + y^2 \quad \text{και} \quad z = 4 - 2x - 4y.$$

Το στερεό είναι μία φέτα του παραβολοειδούς $z = x^2 + y^2$ που κόβεται από το επίπεδο $z = 4 - 2x - 4y$. Στο Σχήμα 5.18 βλέπουμε μία άποψη του στερεού αυτού. Για να βρούμε την περιοχή του επιπέδου Oxy πάνω από την οποία εκτείνεται το στερεό, αρκεί να απαλείψουμε το z από τις εξισώσεις των δύο επιφανειών. Για τον λόγο αυτόν θέτουμε

$$x^2 + y^2 = 4 - 2x - 4y.$$

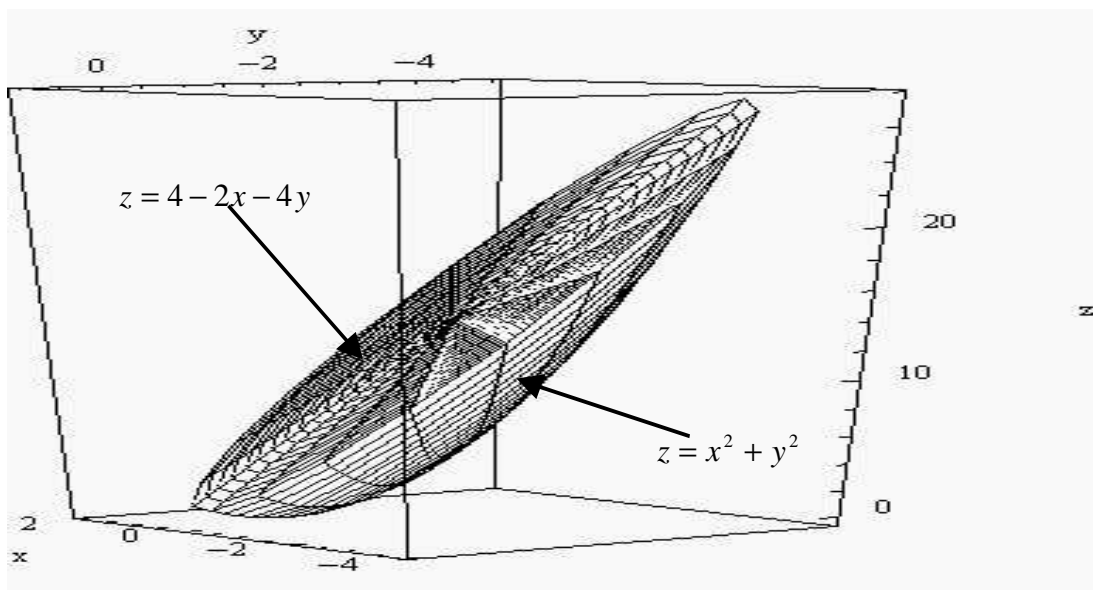
5. Διπλά ολοκληρώματα

Η σχέση αυτή μπορεί να γραφεί και με τη μορφή:

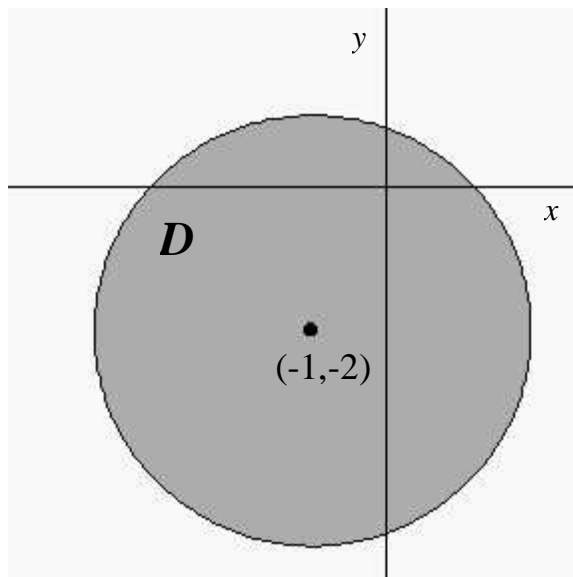
$$(x+1)^2 + (y+2)^2 = 9.$$

Αυτό σημαίνει ότι η καμπύλη πάνω από την οποία τέμνονται οι επιφάνειες είναι ένας κύκλος με κέντρο το σημείο $(-1, -2)$ και ακτίνα 3. Η περιοχή ολοκλήρωσης θα είναι δηλαδή ο αντίστοιχος κυκλικός δίσκος (Σχήμα 5.19)

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : (x+1)^2 + (y+2)^2 \leq 3^2\}.$$



Σχήμα 5.18: Το στερεό ανάμεσα στις επιφάνειες του Παραδείγματος 5.11



Σχήμα 5.19: Η περιοχή ολοκλήρωσης του Παραδείγματος 5.11

Ο ζητούμενος όγκος (βλ. Εφαρμογή 2) θα είναι:

$$V = \iint_D |4 - 2x - 2y - x^2 - y^2| dx dy = \iint_D \{9 - (x+1)^2 - (y+2)^2\} dx dy.$$

Για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα αλλάζουμε μεταβλητές ως εξής:

$$x+1 = r \cos \theta, \quad y+2 = r \sin \theta$$

ή

$$x = r \cos \theta - 1, \quad y = r \sin \theta - 1$$

οπότε

$$\frac{D(x,y)}{D(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r.$$

Η νέα περιοχή ολοκλήρωσης θα είναι:

$$D^* = \{(r, \theta) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq r \leq 3, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

και ο όγκος του στερεού

$$V = \iint_{D^*} (9 - r^2) r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^3 (9 - r^2) r dr \right] d\theta = \left\{ \int_0^3 (9 - r^2) r dr \right\} \left\{ \int_0^{2\pi} d\theta \right\} = \frac{81\pi}{2}.$$

Παρατηρείστε ότι η αλλαγή μεταβλητών που εφαρμόσαμε εδώ ήταν σε πολικές συντεταγμένες, με τη διαφορά ότι αρχή των αξόνων τώρα θεωρούμε το σημείο $(-1, -2)$.

Παράδειγμα 5.12

Θα υπολογίσουμε το εμβαδόν της παραβολοειδούς επιφάνειας

$$z = 2 - (x^2 + y^2)$$

που βρίσκεται προς τα θετικά z . Η επιφάνεια αυτή φαίνεται στο Σχήμα 5.20. Το παραβολοειδές τέμνει το επίπεδο Oxy (δηλαδή το $z = 0$) στην καμπύλη με εξίσωση

$$2 - (x^2 + y^2) = 0$$

δηλαδή στον κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\sqrt{2}$. Η περιοχή ολοκλήρωσης θα είναι δηλαδή:

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2\}.$$

Το εμβαδόν της επιφάνειας δίνεται από το ολοκλήρωμα (βλ. Εφαρμογή 4):

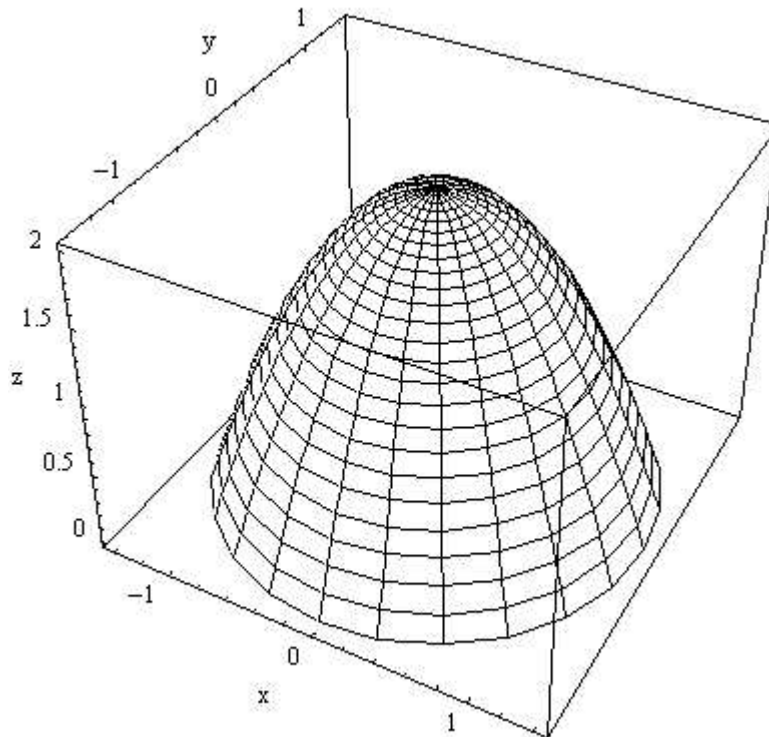
$$\iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy = \iint_D \sqrt{1 + (-2x)^2 + (-2y)^2} dx dy = \iint_D \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)} dx dy$$

Με αλλαγή σε πολικές συντεταγμένες θα έχουμε περιοχή ολοκλήρωσης:

$$D^* = \{(r, \theta) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq r \leq \sqrt{2}, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

ενώ η το ζητούμενο εμβαδόν θα είναι:

$$\iint_{D^*} \sqrt{1 + 4r^2} r dr d\theta = \left\{ \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1 + 4r^2} r dr \right\} \left\{ \int_0^{2\pi} d\theta \right\} = \frac{13\pi}{3}.$$



Σχήμα 5.20: Η επιφάνεια του Παραδείγματος 5.12

Παράδειγμα 5.13

Θα υπολογίσουμε τη μέση τιμή της συνάρτησης $f(x, y) = x \sin^2(xy)$ στην ορθογώνια περιοχή $D = [0, \pi] \times [0, \pi]$. Από την Εφαρμογή 5 βλέπουμε ότι αρχικά πρέπει να υπολογίσουμε το

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^\pi \left[\int_0^\pi x \sin^2(xy) dy \right] dx = \int_0^\pi \left[x \int_0^\pi \frac{1 - \cos(2xy)}{2} dy \right] dx =$$

$$\int_0^\pi x \left[\frac{y}{2} - \frac{\sin(2xy)}{4x} \right]_{y=0}^\pi dx = \int_0^\pi \left[\frac{\pi x}{2} - \frac{\sin(2\pi x)}{4} \right] dx = \left[\frac{\pi x^2}{4} + \frac{\cos(2\pi x)}{8\pi} \right]_0^\pi = \frac{\pi^3}{4} + \frac{\cos(2\pi^2) - 1}{8\pi}.$$

Ακόμη,

$$\iint_D dx dy = E(D) = \pi^2.$$

Τελικά, η μέση τιμή της συνάρτησης θα είναι

$$\left(\frac{\pi^3}{4} + \frac{\cos(2\pi^2) - 1}{8\pi} \right) / \pi^2 = \frac{\pi}{4} + \frac{\cos(2\pi^2) - 1}{8\pi^3} \approx 0.7839.$$

Παράδειγμα 5.14

Θα εντοπίσουμε το κέντρο μάζας της περιοχής $D = [0,1] \times [0,1]$ αν η συνάρτηση πυκνότητας είναι $\rho(x, y) = e^{x+y}$.

Αρχικά υπολογίζουμε τη μάζα (Εφαρμογή 6):

$$M = \iint_D e^{x+y} dx dy = \int_0^1 \left[e^y \int_0^1 e^x dx \right] dy = (e-1) \int_0^1 e^y dy = (e-1)^2$$

Στη συνέχεια (Εφαρμογή 7) υπολογίζουμε τα ολοκληρώματα:

$$\iint_D x e^{x+y} dx dy = \int_0^1 \left[\int_0^1 x e^x e^y dx \right] dy = \int_0^1 \left[e^y \int_0^1 x e^x dx \right] dy = \int_0^1 [e^y \cdot 1] dy = e - 1$$

και όμοια

$$\iint_D y e^{x+y} dx dy = e - 1.$$

Αρα, το κέντρο μάζας θα έχει συντεταγμένες

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{e-1}{(e-1)^2}, \frac{e-1}{(e-1)^2} \right) \approx (0.582, 0.582).$$

§5.6. Γενικευμένα διπλά ολοκληρώματα

Στις προηγούμενες παραγράφους, υποθέσαμε ότι η περιοχή ολοκλήρωσης είναι φραγμένη και ακόμη ότι και η συνάρτηση είναι φραγμένη. Θα εξετάσουμε τώρα τρόπους με τους οποίους μπορούμε να υπολογίσουμε ολοκληρώματα συναρτήσεων δυο μεταβλητών όταν κάποια από τις υποθέσεις αυτές δεν ικανοποιείται. Τα ολοκληρώματα τέτοιου τύπου ονομάζονται

γενικευμένα ή καταχρηστικά ή μη – γνήσια ολοκληρώματα. Ο τρόπος με τον οποίο υπολογίζουμε τέτοια ολοκληρώματα αποτελεί γενίκευση των μεθόδων που εφαρμόζουμε και στα μη γνήσια απλά ολοκληρώματα. Θα διακρίνουμε δύο διαφορετικές περιπτώσεις και θα δώσουμε μία μεθοδολογία επίλυσης μέσα από παραδείγματα χωρίς αυστηρούς μαθηματικούς ορισμούς:

1η Περίπτωση: Η συνάρτηση $f(x, y)$ ορίζεται σε φραγμένη περιοχή D αλλά απειρίζεται σε κάποια σημεία, δηλαδή δεν είναι φραγμένη στο πεδίο ορισμού της. Σε τέτοιου είδους προβλήματα, εντοπίζουμε τα σημεία όπου η f απειρίζεται και στη συνέχεια ορίζουμε κατάλληλη ακολουθία από περιοχές

$$D_1 \subset D_2 \subset \dots \subset D_n \subset \dots \subset D.$$

Φροντίζουμε η ακολουθία $\{D_n\}$ να αποτελείται από φραγμένες περιοχές όπου η συνάρτηση f ορίζεται και είναι συνεχής. Είναι απαραίτητο ακόμη τα εμβαδά $E(D_n)$ να πλησιάζουν προς το εμβαδόν $E(D)$, δηλαδή $\lim_{n \rightarrow \infty} E(D_n) = E(D)$, και τα ολοκληρώματα $\iint_{D_n} |f(x, y)| dx dy$

να είναι φραγμένα ανεξάρτητα από το n . Τότε αποδεικνύεται ότι το όριο

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} f(x, y) dx dy$$

υπάρχει και είναι ανεξάρτητο της εκλογής ακολουθίας. Το όριο αυτό χρησιμοποιείται για να ορίσει το μη γνήσιο ολοκλήρωμα:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} f(x, y) dx dy = \iint_D f(x, y) dx dy$$

Παράδειγμα 5.15

Θα υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $I = \iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ όπου $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Η

περιοχή ολοκλήρωσης είναι ο μοναδιαίος κυκλικός δίσκος με κέντρο την αρχή των αξόνων και είναι φραγμένη περιοχή. Η συνάρτηση όμως απειρίζεται στο $(0,0)$ (Σχήμα 5.21) και επομένως έχουμε ένα γενικευμένο ολοκλήρωμα. Ακολουθούμε λοιπόν την εξής διαδικασία:

Γύρω από το σημείο $O(0,0)$ θεωρούμε την ακολουθία των φραγμένων περιοχών

$$D_n = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 : \frac{1}{n} \leq x^2 + y^2 \leq 1 \right\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Στους κυκλικούς αυτούς δακτυλίους (Σχήμα 5.22), η συνάρτηση είναι φραγμένη και ολοκληρώσιμη. Επιπλέον, ισχύει $D_1 \subset D_2 \subset D_3 \subset \dots \subset D$. Σημειώστε ότι D_1 είναι τα σημεία στην περιφέρεια του μοναδιαίου κύκλου ενώ σταδιακά η ακολουθία εκτείνεται και "γεμίζει" τον μοναδιαίο δίσκο D . Αλλάζοντας σε πολικές συντεταγμένες, οι περιοχές γίνονται:

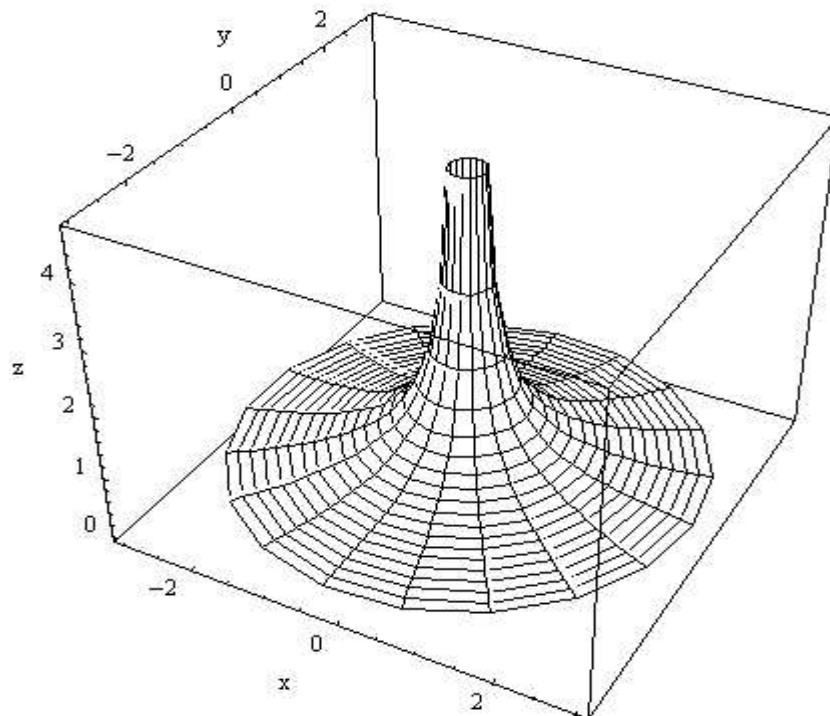
$$D_n^* = \left\{ (r, \theta) \in \mathbf{R}^2 : \frac{1}{n} \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi \right\}.$$

Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα:

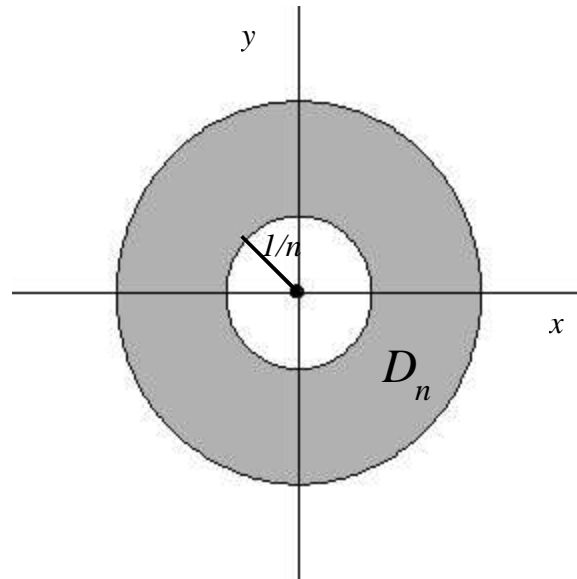
$$I_n = \iint_{D_n} \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \iint_{D_n^*} \frac{r dr d\theta}{r} = \left\{ \int_{1/n}^1 dr \right\} \left\{ \int_0^{2\pi} d\theta \right\} = 2\pi \left(1 - \frac{1}{n} \right).$$

Τελικά, το ζητούμενο ολοκλήρωμα είναι

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 2\pi \left(1 - \frac{1}{n} \right) = 2\pi.$$



Σχήμα 5.21: Η συνάρτηση του Παραδείγματος 5.15 που απειρίζεται στο $(0, 0)$



Σχήμα 5.22: Η ακολουθία περιοχών D_n του Παραδείγματος 5.15

Παράδειγμα 5.16

Θα υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $I = \iint_D \frac{dx dy}{(x-y)^{2/3}}$ όπου D είναι η περιοχή του επιπέδου που περικλείεται από τις ευθείες $y=0$, $y=x$ και $x=1$.

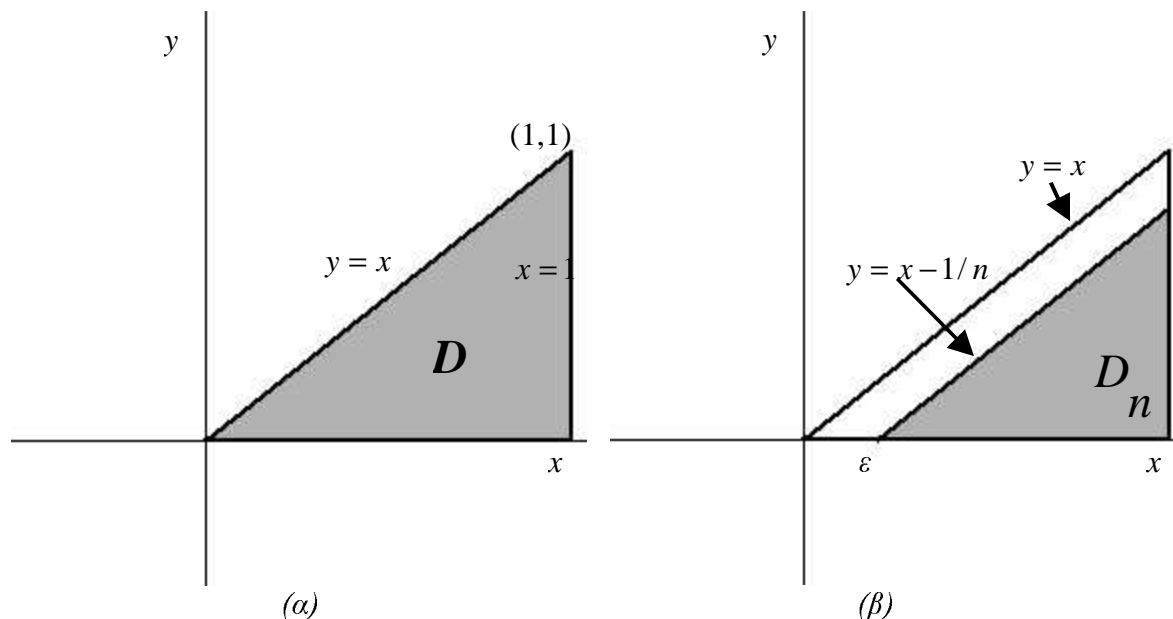
Η τριγωνική περιοχή ολοκλήρωσης που είναι φραγμένη (Σχήμα 5.23-(α)), μπορεί να γραφεί

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}.$$

Θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε διαδοχικά ολοκληρώματα αν και η συνάρτηση ήταν φραγμένη. Η $f(x, y) = \frac{1}{(x-y)^{2/3}}$ όμως απειρίζεται σε όλα τα σημεία της ευθείας $y=x$. Για τον λόγο αυτόν, ορίζουμε ακολουθία περιοχών D_n ως εξής (Σχήμα 5.23 – (β)):

$$D_n = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 : \frac{1}{n} \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x - \frac{1}{n} \right\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Και εδώ παρατηρούμε ότι η "μονότονη" ακολουθία των τριγωνικών περιοχών $D_1 \subset D_2 \subset D_3 \subset \dots$ εκτείνεται σταδιακά και γεμίζει την περιοχή D .



Σχήμα 5.23: (α) Η περιοχή ολοκλήρωσης D του Παραδείγματος 5.16 και (β) η ακολουθία περιοχών D_n όπου η συνάρτηση είναι φραγμένη

Στις περιοχές αυτές μπορούμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα:

$$I_n = \iint_{D_n} \frac{dx dy}{(x-y)^{2/3}} = \int_{1/n}^1 \left[\int_0^{x-1/n} \frac{dy}{(x-y)^{2/3}} \right] dx = \int_{1/n}^1 \left[3x^{1/3} - \left(\frac{1}{n}\right)^{1/3} \right] dx = \frac{3}{4} \left(\frac{1}{n}\right)^{4/3} - 3 \left(\frac{1}{n}\right)^{1/3} + \frac{9}{4}$$

Το ζητούμενο ολοκλήρωμα θα είναι τότε:

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{3}{4} \left(\frac{1}{n}\right)^{4/3} - 3 \left(\frac{1}{n}\right)^{1/3} + \frac{9}{4} \right] = \frac{9}{4}$$

2η Περίπτωση: Η συνάρτηση $f(x, y)$ είναι συνεχής αλλά η περιοχή ολοκλήρωσης D δεν είναι φραγμένη. Δεν υπάρχει δηλαδή κάποια κλειστή καμπύλη που να περικλείει την περιοχή. Σε αυτές τις περιπτώσεις, επιλέγουμε κατάλληλη ακολουθία από καμπύλες που ορίζουν φραγμένες περιοχές

$$D_1 \subset D_2 \subset \dots \subset D_n \subset \dots \subset D.$$

Πρέπει τα ολοκληρώματα $\iint_{D_n} |f(x, y)| dx dy$ να είναι φραγμένα ανεξάρτητα από το n και ακόμη κάθε φραγμένο υποσύνολο της D να περιέχεται σε ένα τουλάχιστον από τα σύνολα D_n . Τότε ορίζουμε

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} f(x, y) dx dy$$

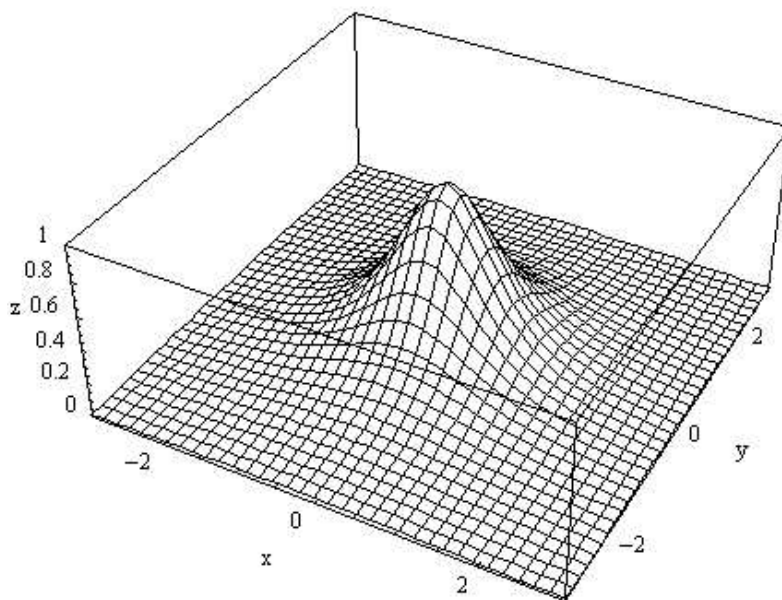
εφόσον βέβαια το όριο υπάρχει και είναι ανεξάρτητο της εκλογής ακολουθίας.

Παράδειγμα 5.17

Θα υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $I = \iint_D \frac{dx dy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}$ όπου $D = \mathbf{R}^2$. Προφανώς, η

περιοχή ολοκλήρωσης δεν είναι φραγμένη ενώ η συνάρτηση $f(x, y) = \frac{1}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}$ είναι

παντού συνεχής και φραγμένη. Η γραφική της παράσταση φαίνεται στο Σχήμα 5.24.



Σχήμα 5.24: Γραφική παράσταση της $f(x, y) = \frac{1}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}$

Θεωρούμε την ακολουθία κύκλων με κέντρο το $(0,0)$ και ακτίνα n

$$x^2 + y^2 = n^2$$

οι οποίοι ορίζουν τις φραγμένες επίπεδες περιοχές

$$D_n = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq n^2\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

για τις οποίες ισχύει $D_1 \subset D_2 \subset \dots \subset D_n \subset \dots \subset \mathbf{R}^2$.

Στη συνέχεια υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα

$$I_n = \iint_{D_n} \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}$$

το οποίο μετά από αλλαγή σε πολικές συντεταγμένες γίνεται:

$$I_n = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^n \frac{rdr}{(1+r^2)^{3/2}} \right] d\theta = 2\pi \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+n^2}} \right)$$

Το ζητούμενο ολοκλήρωμα θα είναι:

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 2\pi \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+n^2}} \right) = 2\pi .$$

Παράδειγμα 5.18

Θεωρούμε το ολοκλήρωμα $\iint_D e^{-x^2-y^2} dxdy$ όπου $D = \mathbf{R}^2$. Επιλέγουμε σαν ακολουθία $\{D_n\}$

τους κυκλικούς δίσκους ακτίνας n με κέντρο στην αρχή των αξόνων. Μετά από μετασχηματισμό σε πολικές συντεταγμένες έχουμε:

$$\iint_{D_n} e^{-x^2-y^2} dxdy = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^n r e^{-r^2} dr \right] d\theta = \pi(1 - e^{-n^2}) .$$

Επομένως, η τιμή του μη γνήσιου ολοκληρώματος είναι

$$\iint_D e^{-x^2-y^2} dxdy = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi(1 - e^{-n^2}) = \pi .$$

Αν τώρα πάρουμε μία άλλη ακολουθία $\{S_n\}$ η οποία αποτελείται από τις τετραγωνικές περιοχές

$$S_n = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : -n \leq x \leq n, -n \leq y \leq n\}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

θα πρέπει να βρούμε το ίδιο όριο. Έχουμε:

$$\iint_{S_n} e^{-x^2-y^2} dxdy = \iint_{S_n} e^{-x^2} \cdot e^{-y^2} dxdy = \left\{ \int_{-n}^n e^{-x^2} dx \right\} \cdot \left\{ \int_{-n}^n e^{-y^2} dy \right\} = \left\{ \int_{-n}^n e^{-x^2} dx \right\}^2$$

απ' όπου προκύπτει

$$\iint_D e^{-x^2-y^2} dxdy = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \int_{-n}^n e^{-x^2} dx \right\}^2 = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right\}^2 .$$

Επειδή λοιπόν από τις ακολουθίες $\{D_n\}$ και $\{S_n\}$ πρέπει να προκύψει η ίδια τιμή για το μη γνήσιο ολοκλήρωμα, ισχύει:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} .$$

Έχουμε δηλαδή χρησιμοποιήσει τη θεωρία των διπλών μη γνήσιων ολοκληρωμάτων για να υπολογίσουμε ένα απλό μη γνήσιο ολοκλήρωμα μεγάλης σημασίας στην ανάλυση, που διαφορετικά είναι πολύ δύσκολο να υπολογιστεί αφού το αόριστο ολοκλήρωμα της συνάρτησης e^{-x^2} δεν μπορεί να εκφραστεί με στοιχειώδεις συναρτήσεις.

Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο 6

Τριπλά ολοκληρώματα

Στο κεφάλαιο αυτό θα επεκτείνουμε τις αρχές των διπλών ολοκληρωμάτων στην ολοκλήρωση συναρτήσεων τριών μεταβλητών, δηλαδή στα τριπλά ολοκληρώματα. Οι περιοχές ολοκλήρωσης είναι τώρα τρισδιάστατες περιοχές του \mathbf{R}^3 . Θα εξετάσουμε λοιπόν στη συνέχεια τρόπους ολοκλήρωσης με διαδοχικά ολοκληρώματα, με αλλαγή μεταβλητών σε σφαιρικές και κυλινδρικές συντεταγμένες και ακόμη κάποιες εφαρμογές του τριπλού ολοκληρώματος.

§6.1. Ορισμός του τριπλού ολοκληρώματος

Υποθέτουμε ότι δίνεται μία συνεχής συνάρτηση τριών μεταβλητών $f : B \subset \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ όπου το πεδίο ορισμού B είναι ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με έδρες παράλληλες προς τα επίπεδα που σχηματίζουν οι άξονες συντεταγμένων. Το ορθογώνιο πεδίο είναι δηλαδή το Καρτεσιανό γινόμενο

$$B = [a, b] \times [c, d] \times [u, v]$$

το οποίο μπορεί να γραφεί και με τη μορφή

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, u \leq z \leq v\}.$$

Το ολοκλήρωμα της f πάνω στην περιοχή B ορίζεται σαν ένα όριο αθροισμάτων, όπως ακριβώς έγινε και στις συναρτήσεις δύο μεταβλητών. Θεωρούμε δηλαδή μία **κανονική διαμέριση** του B ,

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b, \quad c = y_0 < y_1 < \dots < y_n = d, \quad u = z_0 < z_1 < \dots < z_n = v$$

η οποία διαιρεί τις τρεις πλευρές του B σε n ίσα διαστήματα έτσι ώστε

$$\Delta x = x_{k+1} - x_k = \frac{b-a}{n}, \quad \Delta y = y_{k+1} - y_k = \frac{d-c}{n} \quad \text{και} \quad \Delta z = z_{k+1} - z_k = \frac{v-u}{n}.$$

Η διαμέριση αυτή χωρίζει την ορθογώνια περιοχή B σε n^3 ίσα ορθογώνια παραλληλεπίπεδα

$$B_{ijk} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \times [z_k, z_{k+1}].$$

Αν στο κάθε ένα από αυτά τα ορθογώνια παραλληλεπίπεδα πάρουμε ένα τυχαίο σημείο P_{ijk} , σχηματίζουμε το άθροισμα

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} f(P_{ijk}) \Delta x \Delta y \Delta z$$

το οποίο είναι ένα **άθροισμα Riemann** της f . Αν υπάρχει το $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, και είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των σημείων P_{ijk} , τότε λέμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στην B και ορίζουμε σαν **τριπλό ολοκλήρωμα** της f στην B :

$$\iiint_B f(x, y, z) dx dy dz = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} f(P_{ijk}) \Delta x \Delta y \Delta z.$$

Αποδεικνύεται ότι οι συνεχείς συναρτήσεις είναι ολοκληρώσιμες. Ακόμη, οι φραγμένες συναρτήσεις με ασυνέχειες που σχηματίζουν γραφήματα συνεχών συναρτήσεων (της μορφής $z = g(x, y)$ ή $x = g(y, z)$ ή $y = g(x, z)$) είναι επίσης ολοκληρώσιμες.

Ο υπολογισμός του τριπλού ολοκληρώματος ανάγεται στα διαδοχικά ολοκληρώματα. Αν λοιπόν η περιοχή ολοκλήρωσης είναι $B = [a, b] \times [c, d] \times [u, v]$, τότε έχουμε:

$$\begin{aligned} \iiint_B f(x, y, z) dx dy dz &= \int_u^v \int_c^d \int_a^b f(x, y, z) dx dy dz = \int_u^v \left[\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y, z) dx \right) dy \right] dz \\ &= \int_u^v \int_a^b \int_c^d f(x, y, z) dy dx dz = \int_u^v \left[\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y, z) dy \right) dx \right] dz \end{aligned}$$

κ.ο.κ.

Υπάρχουν δηλαδή 6 (=3!) δυνατά διαδοχικά ολοκληρώματα τα οποία είναι ισοδύναμα και δίνουν σε τρία βήματα την τιμή του τριπλού ολοκληρώματος.

Όταν η τρισδιάστατη περιοχή ολοκλήρωσης B είναι ένα γενικότερα φραγμένο υποσύνολο του \mathbf{R}^3 , τότε ενεργούμε όπως και στις αντίστοιχες περιπτώσεις των διπλών ολοκληρωμάτων: Θεωρούμε ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο \hat{B} το οποίο περικλείει την περιοχή B . Στη συνέχεια, επεκτείνουμε τη συνάρτηση $f: B \rightarrow \mathbf{R}$ έτσι ώστε να ορίζεται σε όλο το ορθογώνιο με τον εξής τρόπο:

$$\hat{f}(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z), & (x, y, z) \in B \\ 0, & (x, y, z) \in \hat{B} \text{ και } (x, y, z) \notin B \end{cases}$$

Το τριπλό ολοκλήρωμα της f στην B ορίζεται

$$\iiint_B f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\hat{B}} \hat{f}(x, y, z) dx dy dz.$$

και είναι ανεξάρτητο από την επιλογή του \hat{B} .

Θα δώσουμε τώρα τους τύπους υπολογισμού τριπλών ολοκληρωμάτων σε τρισδιάστατες περιοχές ειδικής μορφής. Σε κάθε περίπτωση, το τριπλό ολοκλήρωμα ανάγεται σε διαδοχικό ολοκλήρωμα.

1η περίπτωση: Στην κατηγορία αυτή ανήκουν οι περιοχές της μορφής

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : a \leq x \leq b, f_1(x) \leq y \leq f_2(x), g_1(x, y) \leq z \leq g_2(x, y)\}.$$

Το ολοκλήρωμα υπολογίζεται:

$$\iiint_B f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \int_{g_1(x, y)}^{g_2(x, y)} f(x, y, z) dz dy dx = \iint_D \left[\int_{g_1(x, y)}^{g_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dy dx$$

όπου $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : a \leq x \leq b, f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\}$.

Περιγράφοντας μία τέτοια τρισδιάστατη περιοχή, θα μπορούσαμε να πούμε ότι αποτελείται από τα σημεία του 3-χώρου που βρίσκονται ανάμεσα στις επιφάνειες $g_1(x, y)$ και $g_2(x, y)$, αλλά μόνο για τα τμήματα των επιφανειών αυτών που αποτελούν εικόνες των σημείων της επίπεδης περιοχής D . Στην ίδια περίπτωση ανήκουν και οι περιοχές της μορφής

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : c \leq y \leq d, \phi_1(y) \leq x \leq \phi_2(y), g_1(x, y) \leq z \leq g_2(x, y)\}$$

στις οποίες το ολοκλήρωμα είναι

$$\iiint_B f(x, y, z) dx dy dz = \int_c^d \int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} \int_{g_1(x, y)}^{g_2(x, y)} f(x, y, z) dz dx dy = \iint_D \left[\int_{g_1(x, y)}^{g_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dx dy.$$

2η περίπτωση: Η μορφή είναι ίδια με της προηγούμενης περίπτωσης αλλά αλλάζουν ρόλο οι μεταβλητές x και z . Η περιοχή δηλαδή φράσσεται από δύο επιφάνειες και οριοθετείται από μία επίπεδη περιοχή. Το ολοκλήρωμα υπολογίζεται με παρόμοιο τρόπο.

3η περίπτωση: Είναι η ίδια με τις προηγούμενες αλλά αλλάζουν ρόλο οι μεταβλητές y και z . Και αυτό το ολοκλήρωμα ανάγεται σε διαδοχικό.

4η περίπτωση: Οι περιοχές αυτού του τύπου μπορούν να γραφούν με οποιαδήποτε από τις τρεις προηγούμενες μορφές. Σαν παράδειγμα μπορούμε να αναφέρουμε την σφαίρα ακτίνας r , $B = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2\}$.

Αν $f(x, y, z) = 1$, τότε το τριπλό ολοκλήρωμα μας δίνει τον όγκο της περιοχής B (θα τον συμβολίζουμε $V(B)$). Έχουμε δηλαδή

$$V(B) = \iiint_B dx dy dz.$$

Παράδειγμα 6.1

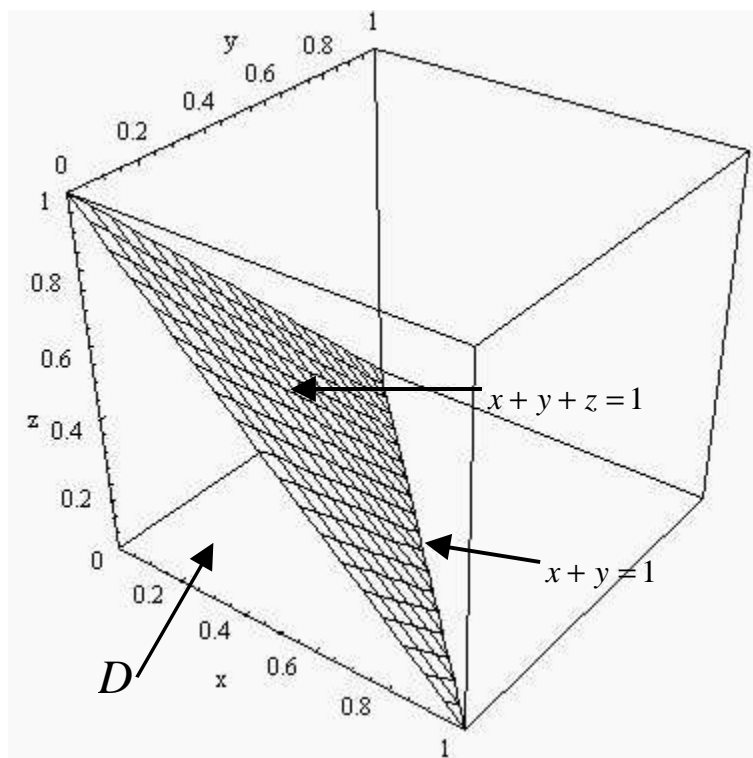
Θα υπολογίσουμε το τριπλό ολοκλήρωμα $\iiint_B xyz dx dy dz$ όπου B η περιοχή που περικλείεται από τα επίπεδα $x=0$, $y=0$, $z=0$ και $x+y+z=1$.

Η περιοχή ολοκλήρωσης B είναι ένα τετράεδρο που ορίζεται από τα επίπεδα των αξόνων και από το επίπεδο $z=1-x-y$ που τέμνει το επίπεδο $z=0$ (το Oxy δηλαδή) στην ευθεία $y=1-x$ (Σχήμα 6.1). Η προβολή της περιοχής B πάνω στο επίπεδο Oxy είναι:

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x\}$$

ενώ η περιοχή B ανήκει στην 1η περίπτωση αφού μπορεί να γραφεί

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x, 0 \leq z \leq 1-x-y\}.$$



Σχήμα 6.1: Η περιοχή ολοκλήρωσης του Παραδείγματος 6.1

6. Τριπλά ολοκληρώματα

Το ολοκλήρωμα θα είναι:

$$\begin{aligned}\iiint_B xyz dx dy dz &= \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} \left(\int_0^{1-x-y} xyz dz \right) dy \right] dx = \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} \left(xy \frac{z^2}{2} \right)_{z=0}^{z=1-x-y} dy \right] dx = \\ &= \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} \frac{xy(1-x-y)^2}{2} dy \right] dx = \int_0^1 \frac{x(1-x)^4}{24} dx = \frac{1}{720}\end{aligned}$$

Παράδειγμα 6.2

Με τριπλή ολοκλήρωση, θα υπολογίσουμε τον όγκο του στερεού που περικλείεται από τις επιφάνειες

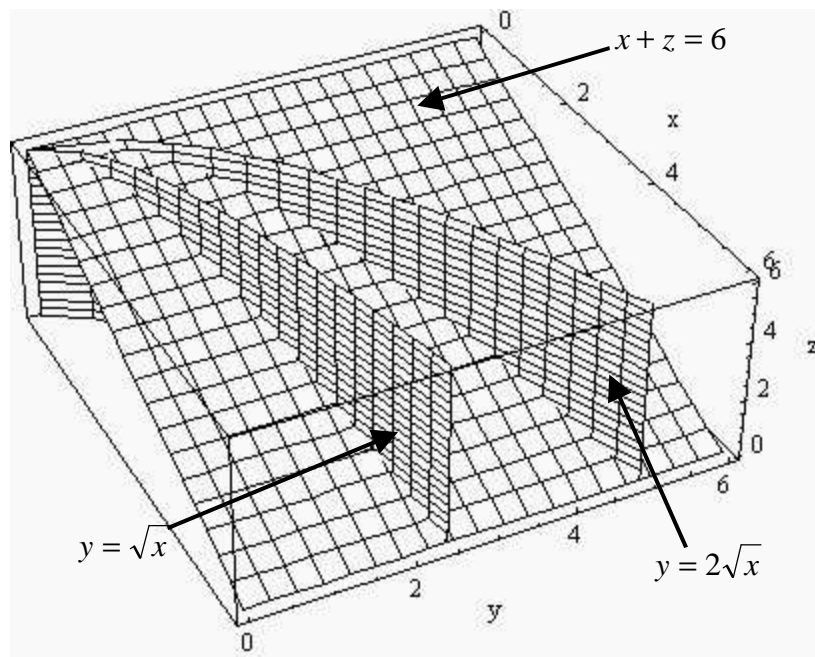
$$y = \sqrt{x}, \quad y = 2\sqrt{x}, \quad z = 0 \quad \text{και} \quad x + z = 6.$$

Στο Σχήμα 6.2 βλέπουμε το επίπεδο $x + z = 6$ (παράλληλο στον y -άξονα) και τις παραβολοειδείς επιφάνειες $y = \sqrt{x}$ και $y = 2\sqrt{x}$ να σχηματίζουν μαζί με το επίπεδο $z = 0$ την περιοχή στην οποία θα ολοκληρώσουμε. Τα επίπεδα $x + z = 6$ και $z = 0$ τέμνονται στην ευθεία $x = 6$. Η προβολή του στερεού πάνω στο επίπεδο Oxy θα είναι η επίπεδη περιοχή

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq x \leq 6, \sqrt{x} \leq y \leq 2\sqrt{x}\}.$$

Η περιοχή ολοκλήρωσης ανήκει στην πρώτη περίπτωση και είναι

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : 0 \leq x \leq 6, \sqrt{x} \leq y \leq 2\sqrt{x}, 0 \leq z \leq 6 - x\}.$$



Σχήμα 6.2: Η περιοχή ολοκλήρωσης του Παραδείγματος 6.2

Ο όγκος της περιοχής είναι

$$\begin{aligned} V(B) &= \iiint_B dx dy dz = \int_0^6 \left[\int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} \left(\int_0^{6-x} dz \right) dy \right] dx = \int_0^6 \left[\int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} (6-x) dy \right] dx \\ &= \int_0^6 \left[\int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} (6-x) dy \right] dx = \int_0^6 \sqrt{x} (6-x) dx = \frac{48\sqrt{6}}{5} \end{aligned}$$

§6.2. Υπολογισμός με αλλαγή μεταβλητών

Είδαμε ότι στα διπλά ολοκληρώματα, η κατάλληλη αλλαγή μεταβλητών συχνά οδηγεί σε απλούστευση των υπολογισμών. Η ίδια μέθοδος χρησιμοποιείται και στα τριπλά ολοκληρώματα και βασίζεται στην έννοια του μετασχηματισμού από τον \mathbf{R}^3 στον \mathbf{R}^3 .

Έστω $G: B^* \subseteq \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ ένας μετασχηματισμός που ορίζεται από τις εξισώσεις

$$x = x(u, v, w), \quad y = y(u, v, w) \quad \text{και} \quad z = z(u, v, w).$$

Η **Ιακωβιανή ορίζουσα** του G ορίζεται

$$\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

και μας δίνει ένα μέτρο της μεταβολής που ένας μετασχηματισμός προκαλεί στον όγκο του πεδίου ορισμού του.

Το **θεώρημα της αλλαγής μεταβλητών** για τριπλά ολοκληρώματα είναι:

Έστω B και B^* φραγμένες περιοχές του \mathbf{R}^3 και $G: B^* \rightarrow B$ μια απεικόνιση συνεχής και παραγωγίσιμη. Υποθέτουμε ακόμη, ότι η G είναι ένα προς ένα στο B^* . Τότε, για κάθε ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f: B \rightarrow \mathbf{R}$ ισχύει:

$$\iiint_B f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{B^*} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left| \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} \right| du dv dw$$

Αν τώρα εφαρμόσουμε το παραπάνω θεώρημα στην περίπτωση αλλαγής σε κυλινδρικές και σφαιρικές συντεταγμένες (§1.4) θα έχουμε:

6. Τριπλά ολοκληρώματα

(α) Αλλαγή σε **κυλινδρικές συντεταγμένες**:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z$$

Η Ιακωβιανή του μετασχηματισμού είναι

$$\frac{D(x, y, z)}{D(r, \theta, z)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$

και άρα

$$\boxed{\iiint_B f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{B^*} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dr d\theta dz}$$

(β) Αλλαγή σε **σφαιρικές συντεταγμένες**:

$$x = \rho \sin \phi \cos \theta, \quad y = \rho \sin \phi \sin \theta, \quad z = \rho \cos \phi.$$

Η Ιακωβιανή του μετασχηματισμού είναι

$$\frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \theta, \phi)} = \begin{vmatrix} \sin \phi \cos \theta & -\rho \sin \phi \sin \theta & \rho \cos \phi \cos \theta \\ \sin \phi \sin \theta & \rho \sin \phi \cos \theta & \rho \cos \phi \sin \theta \\ \cos \phi & 0 & -\rho \sin \phi \end{vmatrix} = -\rho^2 \sin \phi$$

και επομένως

$$\boxed{\iiint_B f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{B^*} f(\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi) \rho^2 \sin \phi d\rho d\theta d\phi}$$

Παράδειγμα 6.3

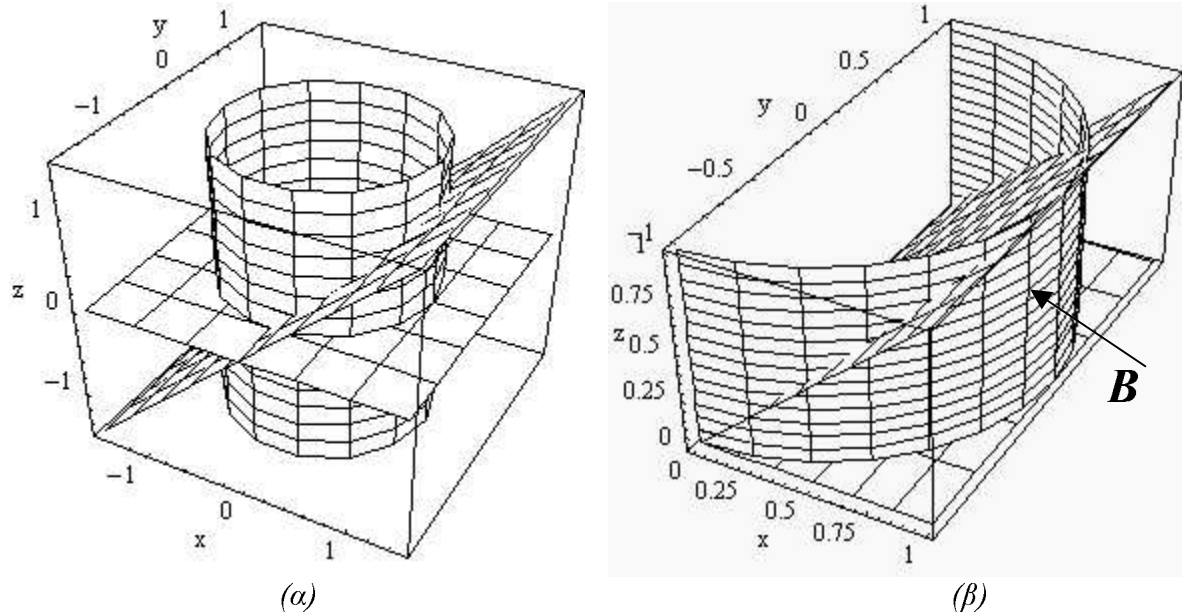
Θα υπολογίσουμε το τριπλό ολοκλήρωμα

$$\iiint_B z \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$$

όπου B είναι η περιοχή του \mathbf{R}^3 που περικλείεται από τις επιφάνειες:

$$x^2 + y^2 = 1, \quad z = 0, \quad z = x \quad (z \geq 0).$$

Η επιφάνεια με εξίσωση $x^2 + y^2 = 1$ είναι ένας κυκλικός κύλινδρος με ακτίνα 1. Το επίπεδο $z = x$ περνά από τον y -άξονα και από τη διχοτόμο της (ορθής) γωνίας που σχηματίζει ο x -άξονας και ο z -άξονας. Η στερεά περιοχή B που σχηματίζεται με βάση το επίπεδο $z = 0$ προς τα θετικά z φαίνεται στο Σχήμα 6.3.



Σχήμα 6.3: Η στερεά περιοχή ολοκλήρωσης του Παραδείγματος 6.3.

(α) Οι επιφάνειες που τη σχηματίζουν και (β) μεγέθυνση της περιοχής

Η προβολή του στερεού πάνω στο επίπεδο Oxy είναι το ήμισυ του κυκλικού δίσκου $x^2 + y^2 \leq 1$ προς τα θετικά x (Αφού $z = x$ και $z \geq 0$). Επομένως, η περιοχή ολοκλήρωσης γράφεται:

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, 0 \leq z \leq x\}.$$

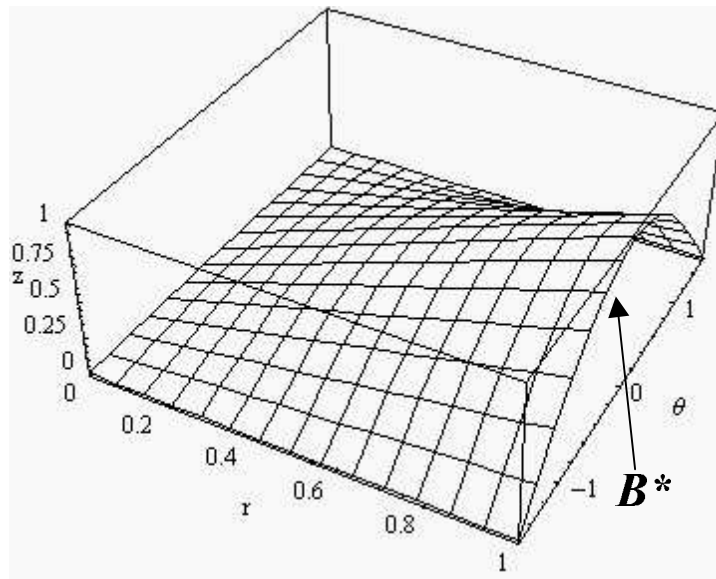
Αν τώρα αλλάξουμε μεταβλητές σε κυλινδρικές συντεταγμένες, η νέα περιοχή ολοκλήρωσης θα είναι:

$$B^* = \{(r, \theta, z) \in \mathbf{R}^3 : 0 \leq r \leq 1, -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq z \leq r \cos \theta\}.$$

Για να γίνει κατανοητός ο μετασχηματισμός, στο Σχήμα 6.4 βλέπουμε το νέο σύστημα συντεταγμένων (r, θ, z) και την επιφάνεια $z = r \cos \theta$. Το στερεό που σχηματίζει η επιφάνεια αυτή με βάση το ορθογώνιο $[0, 1] \times [-\pi/2, \pi/2]$ είναι η νέα περιοχή ολοκλήρωσης.

Εφαρμόζοντας τον τύπο αλλαγής σε κυλινδρικές συντεταγμένες θα πάρουμε:

$$\begin{aligned} \iiint_B z \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz &= \iiint_{B^*} z r \cdot r dr d\theta dz = \int_0^1 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{r \cos \theta} z r^2 dz d\theta dr \\ &= \int_0^1 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{r^4}{2} \cos^2 \theta d\theta dr = \int_0^1 \frac{r^4}{2} \cdot \frac{\pi}{2} dr = \frac{\pi}{20} \end{aligned}$$



Σχήμα 6.4: Η περιοχή ολοκλήρωσης του Παραδείγματος 6.3 μετά από αλλαγή σε κυλινδρικές συντεταγμένες

Παράδειγμα 6.4

Θα υπολογίσουμε το τριπλό ολοκλήρωμα $\iiint_B e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dx dy dz$ όπου B είναι η μοναδιαία σφαίρα με κέντρο την αρχή των αξόνων στον \mathbf{R}^3 . Θα αλλάξουμε σε σφαιρικές συντεταγμένες, κάτι που φαίνεται λογικό αν λάβουμε υπόψη τη μορφή της περιοχής ολοκλήρωσης αλλά και της συνάρτησης $f(x, y, z) = e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$. Η νέα περιοχή ολοκλήρωσης θα είναι

$$B^* = \{(\rho, \theta, \phi) \in \mathbf{R}^3 : 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi\}.$$

Αν εφαρμόσουμε τον τύπο αλλαγής σε σφαιρικές συντεταγμένες, θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \iiint_B e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dx dy dz &= \iiint_{B^*} e^{\rho^3} \rho^2 \sin \phi \, d\rho d\theta d\phi = \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} e^{\rho^3} \rho^2 \sin \phi \, d\theta d\phi d\rho \\ &= 2\pi \int_0^1 \int_0^\pi e^{\rho^3} \rho^2 \sin \phi \, d\phi d\rho = 4\pi \int_0^1 e^{\rho^3} \rho^2 \, d\rho = \frac{4}{3} \pi (e - 1) \end{aligned}$$

§6.3. Εφαρμογές του τριπλού ολοκληρώματος

Θα αναφέρουμε στην παράγραφο αυτή μερικές από τις εφαρμογές του τριπλού ολοκληρώματος, όπως ακριβώς κάναμε και με το διπλό ολοκλήρωμα.

1. **Όγκος** στερεάς περιοχής B :

$$V(B) = \iiint_B dx dy dz$$

2. **Μάζα** στερεάς περιοχής B με συνάρτηση πυκνότητας $\rho(x, y, z)$:

$$M = \iiint_B \rho(x, y, z) dx dy dz$$

3. Συντεταγμένες του **κέντρου μάζας** στερεάς περιοχής B με συνάρτηση πυκνότητας $\rho(x, y, z)$:

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(\frac{\iiint_B x \rho(x, y, z) dx dy dz}{M}, \frac{\iiint_B y \rho(x, y, z) dx dy dz}{M}, \frac{\iiint_B z \rho(x, y, z) dx dy dz}{M} \right)$$

4. **Μέση τιμή** συνάρτησης $f(x, y, z)$ σε στερεά περιοχή B :

$$\text{mean}(f) = \frac{\iiint_B f(x, y, z) dx dy dz}{\iiint_B dx dy dz}$$

5. **Ροπή αδράνειας** του στερεού B με πυκνότητα $\rho(x, y, z)$ ως προς:

$$(\alpha) \text{ την αρχή } O(0,0,0): I_0 = \iiint_B (x^2 + y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dx dy dz$$

$$(\beta) \text{ τον άξονα } Ox: I_x = \iiint_B (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dx dy dz$$

$$(\gamma) \text{ τον άξονα } Oy: I_y = \iiint_B (x^2 + z^2) \rho(x, y, z) dx dy dz$$

$$(\delta) \text{ τον άξονα } Oz: I_z = \iiint_B (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) dx dy dz$$

Παράδειγμα 6.5

Έστω B η στερεά ημισφαιρική περιοχή που ορίζεται από τις ανισότητες $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ και $z \geq 0$. Θα υπολογίσουμε το κέντρο μάζας της B , αν είναι γνωστό ότι η πυκνότητα σε κάθε σημείο είναι ανάλογη με την απόσταση του σημείου από το κέντρο.

Υποθέτουμε ότι το κέντρο του ημισφαίριου είναι η αρχή των αξόνων. Τότε, η συνάρτηση πυκνότητας σε κάθε σημείο είναι $k(x^2 + y^2 + z^2)$ όπου $k \in \mathbf{R}$. Θα χρησιμοποιήσουμε σφαιρικές συντεταγμένες, οπότε η νέα περιοχή ολοκλήρωσης θα είναι

$$B^* = \{(\rho, \theta, \phi) \in \mathbf{R}^3 : 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi/2\}.$$

Από την εφαρμογή 2 και από τον τύπο αλλαγής μεταβλητών, έχουμε τη συνολική μάζα του ημισφαίριου:

$$\begin{aligned} M &= \iiint_B k(x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz = \iiint_{B^*} k\rho \cdot \rho^2 \sin \phi d\rho d\theta d\phi \\ &= \left\{ \int_0^1 k\rho^3 d\rho \right\} \left\{ \int_0^{2\pi} d\theta \right\} \left\{ \int_0^{\pi/2} \sin \phi d\phi \right\} = \frac{k\pi}{2} \end{aligned}$$

Επίσης:

$$\begin{aligned} \iiint_B xk(x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz &= \iiint_{B^*} k\rho^4 \cos \theta \sin^2 \phi d\rho d\theta d\phi \\ &= \left\{ \int_0^1 k\rho^4 d\rho \right\} \left\{ \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta \right\} \left\{ \int_0^{\pi/2} \sin^2 \phi d\phi \right\} = 0 \\ \iiint_B yk(x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz &= \iiint_{B^*} k\rho^4 \sin \theta \sin^2 \phi d\rho d\theta d\phi \\ &= \left\{ \int_0^1 k\rho^4 d\rho \right\} \left\{ \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta \right\} \left\{ \int_0^{\pi/2} \sin^2 \phi d\phi \right\} = 0 \\ \iiint_B zk(x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz &= \iiint_{B^*} k\rho^4 \cos \phi \sin \phi d\rho d\theta d\phi \\ &= \left\{ \int_0^1 k\rho^4 d\rho \right\} \left\{ \int_0^{2\pi} d\theta \right\} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \sin(2\phi) d\phi \right\} = \frac{k\pi}{5} \end{aligned}$$

Τελικά, το κέντρο μάζας δίνεται από την εφαρμογή 3 και είναι το σημείο με συντεταγμένες (0,0,2/5).

Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο 7

Επικαμπύλια και επιφανειακά ολοκληρώματα

Υπάρχουν δύο τρόποι γενίκευσης των απλών ολοκληρωμάτων συναρτήσεων μίας μεταβλητής σε διάστημα των πραγματικών αριθμών: Ο πρώτος είναι τα πολλαπλά ολοκληρώματα, τα οποία συναντήσαμε στα προηγούμενα κεφάλαια και ο δεύτερος είναι τα ολοκληρώματα που ορίζονται πάνω σε καμπύλες ή επιφάνειες. Αυτού του τύπου τα ολοκληρώματα θα εξετάσουμε τώρα.

§7.1. Επικαμπύλια ολοκληρώματα α' είδους

Ας υποθέσουμε ότι δίνεται μία συνάρτηση τριών μεταβλητών $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ και μία καμπύλη c η οποία ορίζεται παραμετρικά από τη διανυσματική συνάρτηση $\vec{r}: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^3$ η οποία είναι της μορφής $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ (βλ. §2.1). Υποθέτουμε ακόμη ότι η f είναι παραγωγίσιμη και ότι η σύνθετη συνάρτηση $f(x(t), y(t), z(t))$ είναι συνεχής (ή τμηματικά συνεχής) στο $[a, b]$. Ορίζουμε τότε σαν **επικαμπύλιο ολοκλήρωμα α' είδους της $f(x, y, z)$ κατά μήκος της καμπύλης c** :

$$\int_c f ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) |\vec{r}'(t)| dt = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt$$

Στην περίπτωση που $f(x, y, z) = 1$, τότε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα συμπίπτει με το μήκος s της καμπύλης (βλ. §2.3).

Βέβαια, ο ορισμός που δώσαμε δεν μας δίνει κάποια εικόνα για την σημασία του επικαμπύλιου ολοκληρώματος. Ο μαθηματικά αυστηρός ορισμός εκφράζεται σαν όριο

7. Επικαμπύλια και επιφανειακά ολοκληρώματα

αθροισμάτων Riemann όπως και όλα τα άλλα ολοκληρώματα. Συνοπτικά, μπορούμε να αναφέρουμε ότι διαιρούμε το διάστημα $[a, b]$ σε πολλά μικρά διαστήματα με τη βοήθεια των σημείων $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$. Αυτός ο διαμερισμός του διαστήματος οδηγεί στον αντίστοιχο διαμερισμό και της καμπύλης c σε μικρότερες καμπύλες c_i που ορίζονται στα διαστήματα $[t_i, t_{i+1}]$. Αν συμβολίσουμε το μήκος της c_i με Δs_i , τότε

$$\Delta s_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} |\vec{r}'(t)| dt.$$

Όσο το $n \rightarrow \infty$, το Δs_i γίνεται μικρό και η f σταθερή στα σημεία της c_i . Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα ορίζεται τότε:

$$\int_c f ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i, y_i, z_i) \Delta s_i.$$

Αποδεικνύεται ότι οι δύο ορισμοί είναι ισοδύναμοι. Ο πρώτος όμως μας δίνει έναν απλό τύπο υπολογισμού ενώ ο δεύτερος βοηθά στην ερμηνεία του επικαμπύλιου ολοκληρώματος. Πράγματι, αν σκεφτούμε την $f(x, y, z)$ σαν την πυκνότητα μάζας του σημείου (x, y, z) , τότε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα δίνει τη συνολική μάζα της καμπύλης, αν την θεωρήσουμε σαν ένα στερεό σώμα χωρίς πάχος.

Στην ειδική περίπτωση που η c είναι επίπεδη καμπύλη και η f συνάρτηση δύο μεταβλητών, τότε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

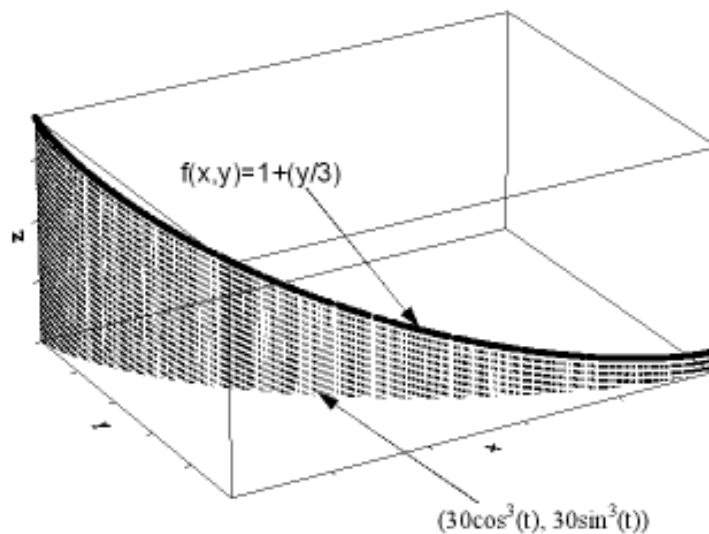
$$\int_c f ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

έχει γεωμετρική ερμηνεία. Συγκεκριμένα, εκφράζει το εμβαδόν ενός "φράκτη", όπου με τον όρο "φράκτης" εννοούμε μια επιφάνεια που έχει σαν βάση την καμπύλη και εκτείνεται σε ύψος που δίνεται από την τιμή της $f(x, y)$ σε κάθε σημείο.

Παράδειγμα 7.1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x, y) = 1 + \frac{y}{3}$ και η καμπύλη c του επιπέδου που ορίζεται παραμετρικά $\vec{r}(t) = (30 \cos^3 t, 30 \sin^3 t)$ όπου $t \in [0, \pi/2]$. Ο φράκτης που ορίζεται φαίνεται στο Σχήμα 7.1. Για να βρούμε το εμβαδόν του αρκεί να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned}\int_c \left(1 + \frac{y}{3}\right) ds &= \int_0^{\pi/2} \left(1 + \frac{30 \sin^3 t}{3}\right) \sqrt{(-90 \cos^2 t \sin t)^2 + (90 \sin^2 t \cos t)^2} dt = \\ &= \int_0^{\pi/2} (1 + 10 \sin^3 t) 90 \cos t \sin t dt = 90 \int_0^{\pi/2} (\sin t + 10 \sin^4 t) \cos t dt \\ &= 90 \left[\frac{\sin^2 t}{2} + 2 \sin^5 t \right]_0^{\pi/2} = 225\end{aligned}$$



Σχήμα 7.1: Εφαρμογή του επικαμπύλιου ολοκληρώματος σε συνάρτηση που ορίζεται σε επίπεδη καμπύλη

Παράδειγμα 7.2

Αν $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ και c η καμπύλη (βλ. Σχήμα 2.2β) με διανυσματική εξίσωση $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$ όπου $t \in [0, 2\pi]$, τότε θα υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $\int_c f ds$.

Έχουμε πρώτα:

$$f(x(t), y(t), z(t)) = [x(t)]^2 + [y(t)]^2 + [z(t)]^2 = \cos^2 t + \sin^2 t + t^2 = 1 + t^2,$$

$$|\vec{r}'(t)| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

Άρα, σύμφωνα με τον ορισμό,

$$\int_c f ds = \int_0^{2\pi} (1 + t^2) \sqrt{2} dt = \frac{2\sqrt{2}\pi}{3} (3 + 4\pi^2).$$

Εφαρμογές του επικαμπύλιου ολοκληρώματος α' είδους

(1) Μία σημαντική εφαρμογή του επικαμπύλιου ολοκληρώματος πραγματικής συνάρτησης είναι ο υπολογισμός της μέσης τιμής συνάρτησης που ορίζεται πάνω σε καμπύλη. Έτσι αν για παράδειγμα η f είναι συνάρτηση θερμοκρασίας σε κάθε σημείο της καμπύλης που παριστά ένα σύρμα, τότε η μέση θερμοκρασία του σύρματος υπολογίζεται με τη βοήθεια επικαμπύλιου ολοκληρώματος. Γενικά, **μέση τιμή** της f κατά μήκος της καμπύλης c

ορίζεται ο αριθμός $\frac{\int_c f(x, y, z) ds}{s}$ όπου s είναι το μήκος της καμπύλης.

(2) Αν η καμπύλη c παριστά στερεό σώμα αμελητέου πάχους του οποίου η πυκνότητα μάζας σε κάθε σημείο είναι η τιμή της συνάρτησης $\rho(x, y, z)$, τότε το **κέντρο μάζας** είναι το σημείο με συντεταγμένες

$$\bar{x} = \frac{\int_c x\rho(x, y, z) ds}{M}, \quad \bar{y} = \frac{\int_c y\rho(x, y, z) ds}{M}, \quad \bar{z} = \frac{\int_c z\rho(x, y, z) ds}{M}$$

όπου $M = \int_c \rho(x, y, z) ds$ είναι η συνολική μάζα της καμπύλης.

Στην περίπτωση που η καμπύλη είναι ομογενές σώμα (σταθερής πυκνότητας μάζας), οι συντεταγμένες του κέντρου μάζας γίνονται:

$$\bar{x} = \frac{\int_c x ds}{s}, \quad \bar{y} = \frac{\int_c y ds}{s}, \quad \bar{z} = \frac{\int_c z ds}{s}.$$

όπου s είναι το μήκος της καμπύλης.

§7.2. Επικαμπύλια ολοκληρώματα β' είδους

Στην κατηγορία αυτή ανήκουν επικαμπύλια ολοκληρώματα διανυσματικών συναρτήσεων. Υποθέτουμε ότι έχουμε ένα διανυσματικό πεδίο $\vec{F}: U \subseteq \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ συνεχές στην παραγωγίσιμη καμπύλη c η οποία ορίζεται παραμετρικά από τη διανυσματική συνάρτηση $\vec{r}: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^3$. Ορίζουμε τότε **σαν επικαμπύλιο ολοκλήρωμα β' είδους του \vec{F} κατά μήκος της καμπύλης c** :

$$\int_c \vec{F} d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt$$

Ολοκληρώνουμε δηλαδή το εσωτερικό γινόμενο του \vec{F} με το \vec{r}' στο διάστημα $[a, b]$.

Αν το διανυσματικό πεδίο δίνεται στη μορφή

$$\vec{F}(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$$

και η καμπύλη c στη μορφή

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad t \in [a, b]$$

τότε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα μπορεί να γραφεί

$$\begin{aligned} \int_c \vec{F} d\vec{r} &= \int_c F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz \\ &= \int_a^b \left[F_1(x(t), y(t), z(t)) \frac{dx}{dt} + F_2(x(t), y(t), z(t)) \frac{dy}{dt} + F_3(x(t), y(t), z(t)) \frac{dz}{dt} \right] dt. \end{aligned}$$

Η έκφραση $\int_c F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$ είναι ένας εναλλακτικός συμβολισμός του επικαμπύλιου ολοκληρώματος διανυσματικής συνάρτησης.

Η φυσική σημασία του επικαμπύλιου ολοκληρώματος διανυσματικού πεδίου είναι η εξής: Αν \vec{F} είναι ένα πεδίο δυνάμεων στον τρισδιάστατο χώρο, υποθέτουμε ότι η δύναμη \vec{F} κινεί ένα σωματίδιο κατά μήκος μίας καμπύλης c . Τότε, το έργο που παράγει η \vec{F} καθώς το σωματίδιο διατρέχει την c εκφράζεται από το $\int_c \vec{F} d\vec{r}$.

Ο πιο μαθηματικός ορισμός με τη βοήθεια των αθροισμάτων Riemann μπορεί να περιγραφεί ως εξής: Καθώς το t μεταβάλλεται από t μέχρι $t + \Delta t$, το σωματίδιο κινείται από τη θέση $\vec{r}(t)$ έως τη θέση $\vec{r}(t + \Delta t)$ ενώ η μετατόπιση εκφράζεται από το διάνυσμα $\Delta \vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$. Από τον ορισμό της παραγώγου έχουμε την προσέγγιση $\Delta \vec{r} \approx \vec{r}'(t) \Delta t$. Το έργο που παράγεται για τη μετακίνηση του σωματιδίου από τη θέση $\vec{r}(t)$ έως τη θέση $\vec{r}(t + \Delta t)$ είναι κατά προσέγγιση $\vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \Delta \vec{r} \approx \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) \Delta t$. Αν διαιρέσουμε το διάστημα $[a, b]$ σε n ίσα τμήματα με τα σημεία $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ και θεωρήσουμε σαν $\Delta t = t_{i+1} - t_i$, το συνολικό έργο που παράγεται είναι κατά προσέγγιση ίσο με

$$\sum_{i=0}^{n-1} \vec{F}(\vec{r}(t_i)) \cdot \vec{r}'(t_i) \cdot \Delta t$$

Όταν $n \rightarrow \infty$, η προσέγγιση βελτιώνεται συνεχώς και επομένως είναι λογικό να ορίσουμε σαν συνολικό έργο της μετατόπισης το όριο:

$$\int_c \vec{F} d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \vec{F}(\vec{r}(t_i)) \cdot \vec{r}'(t) \cdot \Delta t .$$

Παράδειγμα 7.3

Αν $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ και $c: \vec{r}(t) = (\sin t, \cos t, t)$ με $t \in [0, 2\pi]$, θα υπολογίσουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_c \vec{F} d\vec{r}$.

Στο Σχήμα 7.2 βλέπουμε μαζί το διανυσματικό πεδίο και την καμπύλη. Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος, θεωρούμε τη σύνθετη συνάρτηση

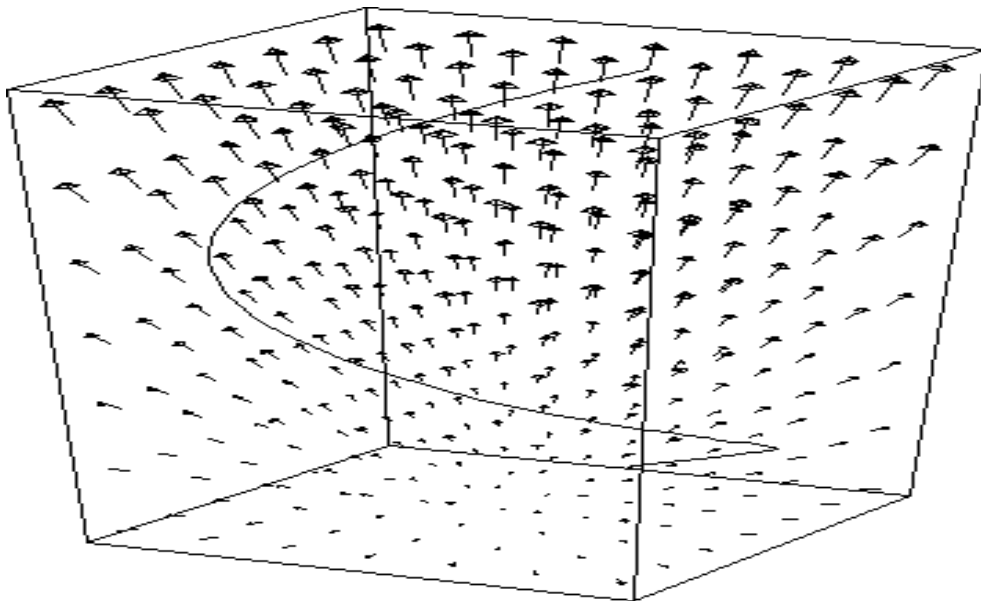
$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = (\sin t, \cos t, t)$$

και την παράγωγο της καμπύλης

$$\vec{r}'(t) = (\cos t, -\sin t, 1) .$$

Επομένως,

$$\int_c \vec{F} d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt = \int_0^{2\pi} (\sin t \cos t - \cos t \sin t + t) dt = \int_0^{2\pi} t dt = 2\pi^2 .$$



Σχήμα 7.2: Διανυσματικό πεδίο και καμπύλη του Παραδείγματος 7.3

Παράδειγμα 7.4

Αν $\vec{F} = (\sin z, \cos z, -(xy)^{1/3})$ και c η καμπύλη $\vec{r}(\theta) = (\cos^3 \theta, \sin^3 \theta, \theta)$ όπου $\theta \in [0, 7\pi/2]$.

Για να υπολογίσουμε το έργο W που παράγεται από την \vec{F} όταν το σημείο εφαρμογής της κινείται κατά μήκος της c , έχουμε:

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = (\sin \theta, \cos \theta, -\cos \theta \sin \theta) \quad \text{και} \quad \vec{r}'(\theta) = (-3\cos^2 \theta \sin \theta, 3\sin^2 \theta \cos \theta, 1),$$

άρα

$$\begin{aligned} W &= \int_c \vec{F} d\vec{r} = \int_0^{7\pi/2} (-3\cos^2 \theta \sin^2 \theta + 3\sin^2 \theta \cos^2 \theta, -\cos \theta \sin \theta) d\theta \\ &= -\int_0^{7\pi/2} \cos \theta \sin \theta d\theta = -\left[\frac{1}{2} \sin^2 \theta \right]_0^{7\pi/2} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Το έργο που παράγεται είναι αρνητική ποσότητα, που σημαίνει ότι το πεδίο αντιτίθεται στην κίνηση κατά μήκος της καμπύλης.

Ιδιότητες:

(1) **Αλλαγή παραμέτρου:** Έστω \vec{F} ένα διανυσματικό πεδίο, συνεχές πάνω στην παραγωγίσιμη καμπύλη c με παραμετρική εξίσωση $\vec{r}: [a_1, b_1] \rightarrow \mathbf{R}^3$. Έστω επίσης μία άλλη καμπύλη γ με εξίσωση $\vec{\rho}: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^3$ για την οποία ισχύει: $\vec{\rho}(t) = \vec{r}(h(t))$ όπου $h: [a, b] \rightarrow [a_1, b_1]$ μία ένα προς ένα πραγματική συνάρτηση. Τότε ισχύει:

$$\int_c \vec{F} d\vec{r} = \pm \int_\gamma \vec{F} d\vec{\rho}$$

Η ιδιότητα αυτή εφαρμόζεται στις περιπτώσεις που έχουμε **αλλαγή παραμέτρου** μέσω της συνάρτησης h . Αν η αλλαγή αυτή **διατηρεί τον προσανατολισμό** της καμπύλης, δηλαδή αν

$$\vec{\rho}(a) = \vec{r}(a_1) \quad \text{και} \quad \vec{\rho}(b) = \vec{r}(b_1),$$

τότε τα δύο επικαμπύλια ολοκληρώματα είναι ίσα. Αν ο προσανατολισμός αντιστρέφεται, δηλαδή αν

$$\vec{\rho}(a) = \vec{r}(b_1) \quad \text{και} \quad \vec{\rho}(b) = \vec{r}(a_1),$$

τότε τα επικαμπύλια ολοκληρώματα είναι αντίθετα.

Μία ειδική περίπτωση αλλαγής παραμέτρου είναι η **αντίθετη καμπύλη** της c , που συμβολίζεται με $-c$ και προκύπτει από την εφαρμογή της συνάρτησης $h:[a,b] \rightarrow [a,b]$ με $h(t) = a + b - t$. Τότε ισχύει: $\int_{-c} \vec{F} d\vec{\rho} = -\int_c \vec{F} d\vec{r}$.

Σημείωση: Στα ολοκληρώματα α' είδους ισχύει πάντοτε η ισότητα έστω και αν ο προσανατολισμός γίνει αντίθετος. Έτσι, για παράδειγμα, έχουμε

$$\int_{-c} f(x, y, z) ds = \int_c f(x, y, z) ds$$

(2) **Γενίκευση του θεμελιώδους θεωρήματος του ολοκληρωτικού λογισμού:** Αν το διανυσματικό πεδίο \vec{F} είναι **συντηρητικό** (βλ. §4.1.), αν δηλαδή υπάρχει πραγματική συνάρτηση $f(x, y, z)$ για την οποία να ισχύει

$$\vec{F} = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right),$$

τότε:

$$\int_c \vec{F} d\vec{r} = \int_c \nabla f d\vec{r} = f(\vec{r}(b)) - f(\vec{r}(a)).$$

Η ιδιότητα αυτή είναι πολύ σημαντική αφού μας επιτρέπει να υπολογίσουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα ενός πεδίου κλίσεων μόνο από τα άκρα της καμπύλης. Τέτοια ολοκληρώματα λέμε ότι είναι **ανεξάρτητα του δρόμου ολοκλήρωσης**, που σημαίνει ότι η τιμή τους είναι η ίδια για οποιαδήποτε καμπύλη με τα ίδια άκρα. Ειδικά σε κλειστές καμπύλες (που τα άκρα τους συμπίπτουν), τα επικαμπύλια ολοκληρώματα συντηρητικών πεδίων είναι ίσα με μηδέν.

Για να διαπιστώσουμε αν ένα διανυσματικό πεδίο είναι συντηρητικό (και επομένως τα επικαμπύλια ολοκληρώματά του ανεξάρτητα δρόμου), ελέγχουμε την περιστροφή του. Ισχύει λοιπόν ότι ένα πεδίο \vec{F} είναι **συντηρητικό** αν και μόνο αν $\text{rot} \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \vec{0}$. Θα συνοψίσουμε λοιπόν όλα όσα αναφέραμε για τα συντηρητικά πεδία. Αποδεικνύεται ότι οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:

- (α) Το πεδίο \vec{F} είναι πεδίο κλίσεων
- (β) Τα επικαμπύλια ολοκληρώματα του \vec{F} σε οποιεσδήποτε δύο καμπύλες με τα ίδια άκρα είναι ίσα.
- (γ) Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του \vec{F} σε οποιαδήποτε κλειστή καμπύλη ισούται με μηδέν.
- (δ) Η περιστροφή του \vec{F} είναι ίση με μηδέν (αστρόβιλο πεδίο).

(3) **Θεώρημα του Green:** Έστω D μία φραγμένη περιοχή του επιπέδου η οποία περικλείεται από την καμπύλη c της οποίας τα άκρα συμπίπτουν και έχει θετικό προσανατολισμό (αντίθετα με τη φορά των δεικτών του ρολογιού). Έστω επίσης το διανυσματικό πεδίο

$$\vec{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)).$$

Τότε

$$\int_c \vec{F} d\vec{r} = \int_c P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

Το θεώρημα του Green είναι σημαντικό γιατί συνδέει ένα επικαμπύλιο ολοκλήρωμα πάνω στο σύνορο μίας περιοχής με ένα διπλό ολοκλήρωμα στο εσωτερικό της περιοχής. Παρέχει έναν εναλλακτικό τρόπο υπολογισμού όταν το διπλό ολοκλήρωμα είναι δύσκολο (ή αντίθετα).

Αν c είναι μία κλειστή καμπύλη που φράσσει μία περιοχή του επιπέδου D στην οποία ισχύει το θεώρημα του Green, τότε το εμβαδόν της περιοχής D είναι:

$$E(D) = \frac{1}{2} \int_c x dy - y dx.$$

Παράδειγμα 7.5

Δίνεται η καμπύλη c που ορίζεται από την $\vec{r}(t) = (t^4/4, \sin^3(t\pi/2), 0)$, $t \in [0, 1]$, και το διανυσματικό πεδίο $\vec{F}(x, y, z) = (y, x, 0)$. Θέλουμε να υπολογίσουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_c \vec{F} d\vec{r}$. Παρατηρούμε ότι $\text{rot} \vec{F} = \vec{0}$ και επομένως το διανυσματικό πεδίο είναι συντηρητικό. Σύμφωνα με όσα αναφέραμε υπάρχει συνάρτηση $f(x, y, z)$ για την οποία ισχύει $\nabla f = \vec{F}$. Μπορούμε να βρούμε εύκολα την f αν λύσουμε το σύστημα των εξισώσεων

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Από την τρίτη εξίσωση ολοκληρώνοντας με σταθερά τα x και y έχουμε:

$$f(x, y, z) = k_1 + f_1(x, y) \quad \text{όπου } k_1 = \text{σταθερό.}$$

Από την πρώτη εξίσωση έχουμε:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial x} = y.$$

Άρα με ολοκλήρωση ως προς x , κρατώντας σταθερό το y , προκύπτει

$$f_1(x, y) = xy + f_2(y).$$

Αντικαθιστώντας τώρα στην δεύτερη εξίσωση του συστήματος έχουμε:

$$x + f_2'(y) = x \quad \text{ή} \quad f_2(y) = k_2 = \text{σταθερό}.$$

Επομένως,

$$f(x, y, z) = xy + k \quad (\text{όπου } k = k_1 + k_2).$$

Σύμφωνα με την Ιδιότητα 2, το ολοκλήρωμα θα είναι:

$$\int_c \vec{F} d\vec{r} = f(\vec{r}(1)) - f(\vec{r}(0)) = f(1/4, 1, 0) - f(0, 0, 0) = \frac{1}{4}.$$

Σημειώστε ότι οποιαδήποτε και αν ήταν η καμπύλη, το ολοκλήρωμα θα ήταν το ίδιο, αρκεί να κρατούσαμε ίδια τα άκρα της.

Παράδειγμα 7.6

Θα υπολογίσουμε με το θεώρημα του Green το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int_c (2x - y + 4)dx + (3x + 5y - 6)dy$$

όπου c είναι ο κύκλος $x^2 + y^2 = 4$ με θετική φορά.

$$P(x, y) = 2x - y + 4 \quad \text{και} \quad Q(x, y) = 3x + 5y - 6$$

οπότε

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -1 \quad \text{και} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 3.$$

Αν λοιπόν $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$, τότε σύμφωνα με το θεώρημα του Green, το ζητούμενο ολοκλήρωμα είναι (μετά από αλλαγή σε πολικές συντεταγμένες)

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D 4 dx dy = 4 \int_0^2 \int_0^{2\pi} \rho d\theta d\rho = 16\pi.$$

§7.3. Επιφάνειες

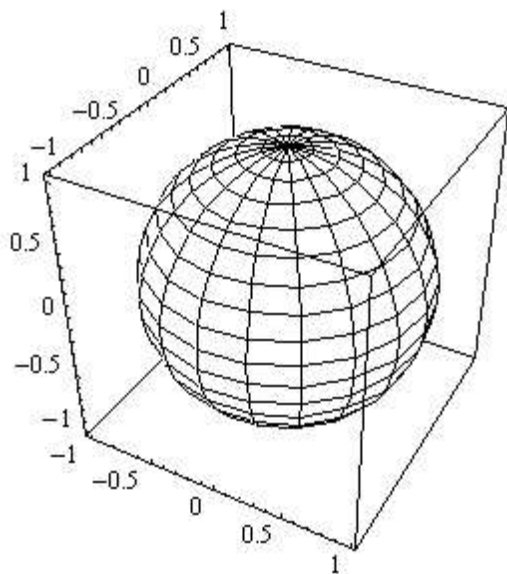
Πριν ασχοληθούμε με τις περιπτώσεις όπου η πραγματική ή η διανυσματική συνάρτηση ολοκληρώνεται πάνω από μία επιφάνεια, θα αναφερθούμε για λίγο στην μαθηματική παράσταση των επιφανειών στον χώρο.

Γνωρίζουμε ότι ένας τρόπος παράστασης επιφανειών είναι οι σχέσεις της μορφής $z = f(x, y)$, δηλαδή αποτελούν το γράφημα μίας συνάρτησης δύο μεταβλητών. Αυτός ο τρόπος παράστασης είναι αρκετά περιοριστικός αφού υπάρχουν επιφάνειες που δεν είναι δυνατό να περιγραφούν έτσι.

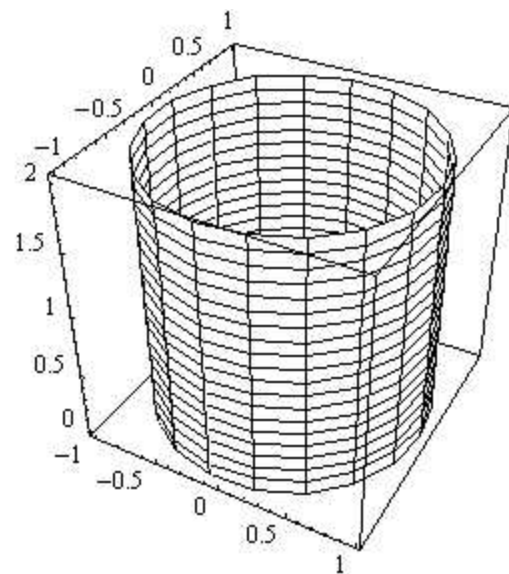
Η πιο γενική μορφή παράστασης επιφάνειας δίνεται με τη βοήθεια μίας διανυσματικής συνάρτησης $\vec{\Phi}: D \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$, όπου D είναι μία επίπεδη περιοχή. Η επιφάνεια S αποτελείται δηλαδή από τα σημεία

$$\vec{\Phi}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)).$$

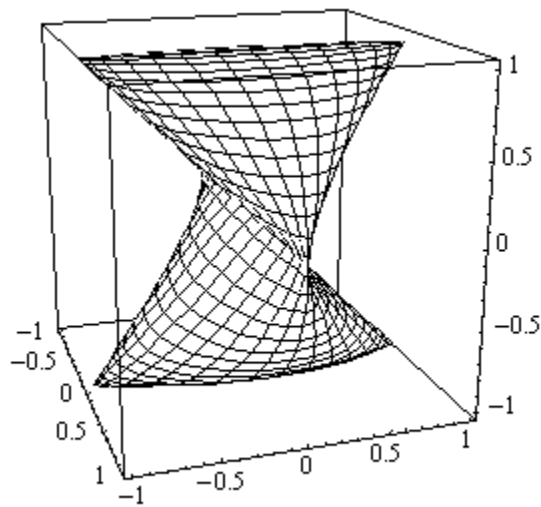
Η έκφραση αυτή είναι γενίκευση των παραμετρικών εξισώσεων που είδαμε στις καμπύλες αφού τώρα έχουμε δύο παραμέτρους u και v . Η συνάρτηση $\vec{\Phi}$ και επομένως και η επιφάνεια S , θεωρούνται παραγωγίσιμες αν οι συναρτήσεις $x(u, v)$, $y(u, v)$ και $z(u, v)$ είναι παραγωγίσιμες.



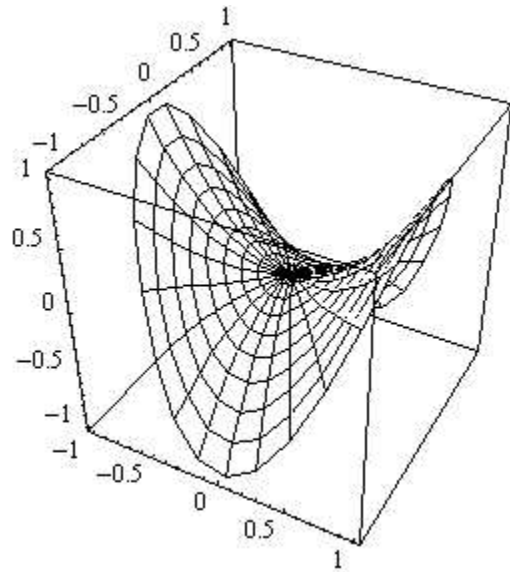
$$\vec{\Phi}(u, v) = (\cos u \sin v, \sin u \sin v, \cos v) \\ (0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq \pi)$$



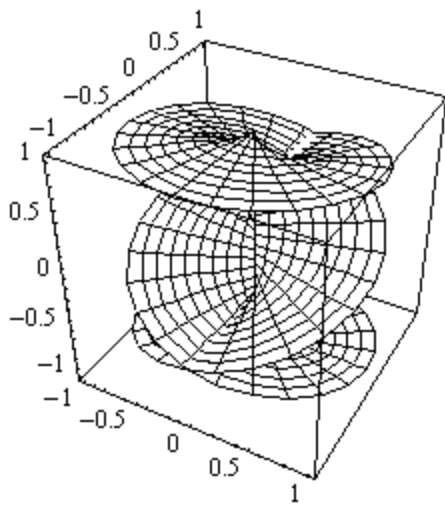
$$\vec{\Phi}(u, v) = (\cos u, \sin u, v) \\ 0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq 2$$



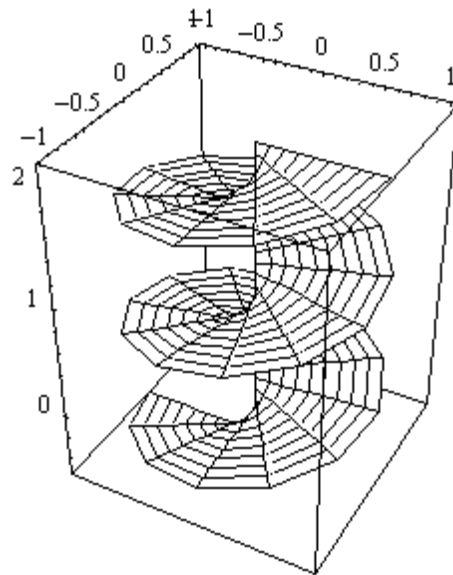
$$\vec{\Phi}(u, v) = (\sin u \cos v, \cos u \sin v, \cos u) \\ (0 \leq u \leq \pi, 0 \leq v \leq 2\pi)$$



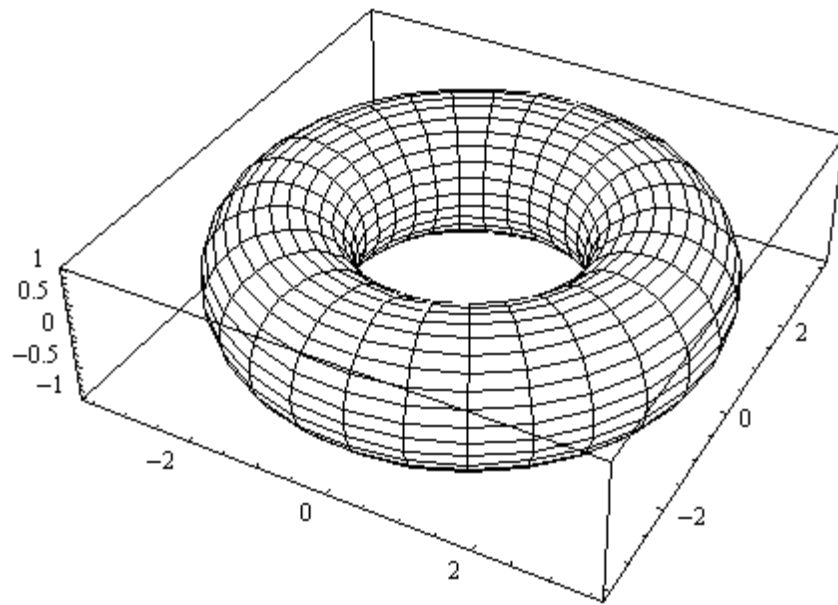
$$\vec{\Phi}(u, v) = (v \cos u, v \sin u, v^2 \cos(2u)) \\ 0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq 1$$



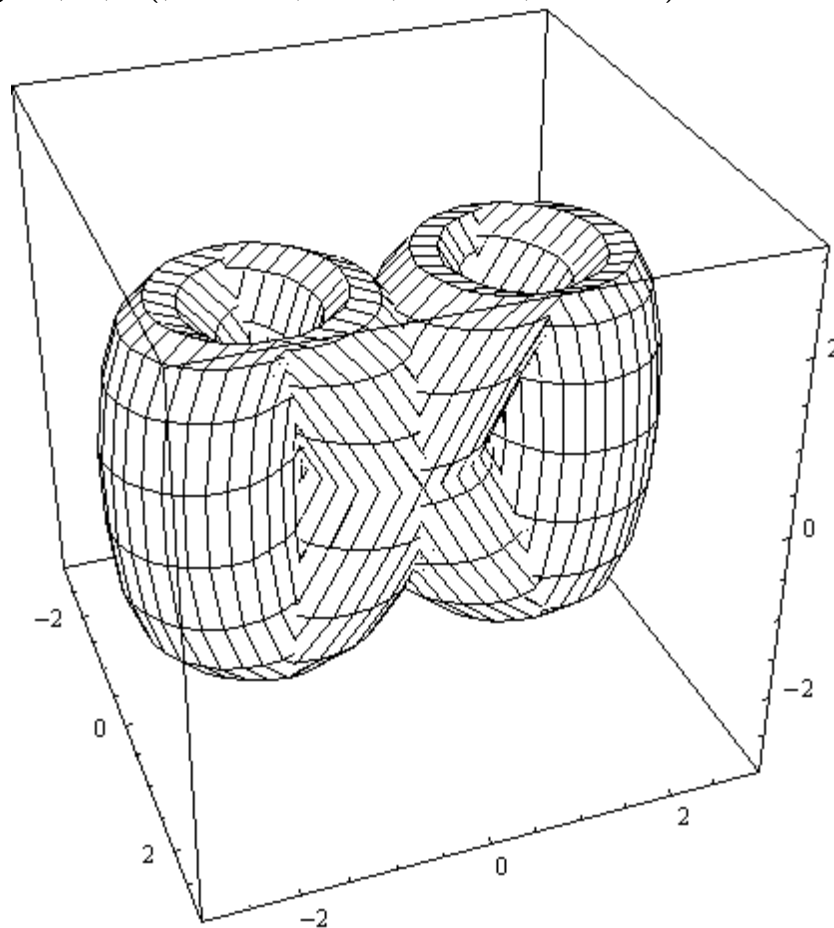
$$\vec{\Phi}(u, v) = (v \cos(3u), v \sin(3u), \sin u) \\ (0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq 1)$$



$$\vec{\Phi}(u, v) = (v \cos u, v \sin u, u/6) \\ -\pi \leq u \leq 4\pi, 0 \leq v \leq 1$$



Τόρος: $\vec{\Phi}(u, v) = ((2.5 + \cos v) \cos u, (2.5 + \cos v) \sin u, \sin v)$, $0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq 2\pi$



$\vec{\Phi}(u, v) = (\cos u, \sin u + 2 \cos v, 2 \sin(2v))$, $0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq 2\pi$

Σχήμα 7.3: Επιφάνειες που ορίζονται με παραμετρικές εξισώσεις

Μία επιφάνεια με εξίσωση $\vec{\Phi}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ ονομάζεται **λεία**, αν σε κάθε σημείο (u,v) για τα δύο εφαπτόμενα διανύσματα της επιφάνειας που δίνονται από τις σχέσεις

$$\vec{T}_u = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right) \quad \text{και} \quad \vec{T}_v = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right)$$

ισχύει

$$\vec{T}_u \times \vec{T}_v \neq \vec{0}.$$

Αυτό σημαίνει ότι αν σε κάποιο σημείο το **κάθετο διάνυσμα** στην επιφάνεια

$$\vec{n} = \vec{T}_u \times \vec{T}_v$$

είναι μηδέν, σε εκείνο το σημείο εμφανίζονται "γωνίες". Το **εφαπτόμενο** στην επιφάνεια **επίπεδο** ορίζεται από τα διανύσματα \vec{T}_u και \vec{T}_v ενώ η εξίσωσή του στο σημείο (x_0, y_0, z_0) είναι

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot \vec{n} = 0.$$

Αν S είναι μία λεία (ή τμηματικά λεία) επιφάνεια που ορίζεται παραμετρικά πάνω από μία επίπεδη περιοχή D , το **εμβαδόν της επιφάνειας** δίνεται από τη σχέση:

$$E(S) = \iint_D |\vec{T}_u \times \vec{T}_v| du dv = \iint_D \sqrt{\left[\frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right]^2 + \left[\frac{D(y,z)}{D(u,v)} \right]^2 + \left[\frac{D(x,z)}{D(u,v)} \right]^2} du dv$$

όπου

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad \frac{D(y,z)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad \frac{D(x,z)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}$$

είναι οι Ιακωβιανές ορίζουσες (βλ. §5.4).

Θα ορίσουμε στη συνέχεια τα ολοκληρώματα πραγματικών και διανυσματικών συναρτήσεων πάνω σε επιφάνειες όπως ακριβώς κάναμε και με τα επικαμπύλια ολοκληρώματα.

§7.4. Επιφανειακά ολοκληρώματα α' είδους

Έστω μία λεία (ή τμηματικά λεία) επιφάνεια S η οποία ορίζεται παραμετρικά από την συνάρτηση $\vec{\Phi}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ όπου $(u, v) \in D \subset \mathbf{R}^2$. Υποθέτουμε επίσης ότι έχουμε μία πραγματική συνεχή συνάρτηση $f(x, y, z)$ που ορίζεται σε όλα τα σημεία (x, y, z) πάνω στην επιφάνεια S . Ορίζουμε τότε σαν **επιφανειακό ολοκλήρωμα α' είδους της συνάρτησης $f(x, y, z)$ πάνω στην επιφάνεια S** :

$$\int_S f dS = \iint_D f(\vec{\Phi}(u, v)) |\vec{T}_u \times \vec{T}_v| du dv$$

όπου τα διανύσματα \vec{T}_u και \vec{T}_v ορίστηκαν σαν εφαπτόμενα διανύσματα στην προηγούμενη παράγραφο. Πιο αναλυτική μορφή του επιφανειακού ολοκληρώματος α' είδους είναι:

$$\int_S f dS = \iint_D f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{\left[\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right]^2 + \left[\frac{D(y, z)}{D(u, v)}\right]^2 + \left[\frac{D(x, z)}{D(u, v)}\right]^2} du dv.$$

Όπως και στην περίπτωση των επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων, μπορούμε να εκφράσουμε το επιφανειακό ολοκλήρωμα σαν όριο αθροισμάτων και να δώσουμε και την αντίστοιχη ερμηνεία. Αν δηλαδή η συνάρτηση $f(x, y, z)$ παριστά την πυκνότητα μάζας κάθε σημείου της επιφάνειας, τότε το επιφανειακό ολοκλήρωμα παριστά τη συνολική μάζα της επιφάνειας αν αυτή θεωρηθεί στερεό σώμα με αμελητέο πάχος.

Στην περίπτωση που η επιφάνεια είναι το γράφημα μίας συνάρτησης $z = g(x, y)$, τότε μπορούμε να την ορίσουμε παραμετρικά με τη μορφή

$$x = u, \quad y = v, \quad z = g(u, v).$$

Στην περίπτωση αυτή ο τύπος υπολογισμού του επιφανειακού ολοκληρώματος είναι:

$$\int_S f dS = \iint_D f(x, y, g(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2} dx dy.$$

Προφανώς, το εμβαδόν μίας επιφάνειας προκύπτει αν στο επιφανειακό ολοκλήρωμα θέσουμε $f(x, y, z) = 1$. Δηλαδή,

$$E(S) = \int_S dS = \iint_D \sqrt{\left[\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right]^2 + \left[\frac{D(y, z)}{D(u, v)}\right]^2 + \left[\frac{D(x, z)}{D(u, v)}\right]^2} du dv$$

Παράδειγμα 7.7

Θα υπολογίσουμε το επιφανειακό ολοκλήρωμα $\int_S z^2 dS$ όπου S είναι η μοναδιαία σφαίρα με εξίσωση $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Εκφράζουμε την σφαίρα παραμετρικά με τη διανυσματική συνάρτηση

$$\vec{\Phi}(u, v) = (\cos \theta \sin \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \phi) \text{ όπου } 0 \leq \phi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Έχουμε

$$\vec{T}_\theta = (-\sin \theta \sin \phi, \cos \theta \sin \phi, 0) \text{ και } \vec{T}_\phi = (\cos \theta \cos \phi, \sin \theta \cos \phi, -\sin \phi)$$

απ' όπου προκύπτει

$$|\vec{T}_\theta \times \vec{T}_\phi| = |\sin \phi|.$$

Επομένως,

$$\int_S z^2 dS = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \cos^2 \phi |\sin \phi| d\phi d\theta = \frac{4\pi}{3}.$$

§7.5. Επιφανειακά ολοκληρώματα β' είδους

Θα ασχοληθούμε τώρα με τα ολοκληρώματα διανυσματικών πεδίων πάνω σε επιφάνειες. Υποθέτουμε ότι έχουμε ένα διανυσματικό πεδίο \vec{F} το οποίο είναι ορισμένο στην λεία (ή τμηματικά λεία) επιφάνεια S που ορίζεται παραμετρικά από την διανυσματική συνάρτηση $\vec{\Phi}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ όπου $(u, v) \in D \subset \mathbf{R}^2$. Ορίζουμε τότε σαν **επιφανειακό ολοκλήρωμα β' είδους του διανυσματικού πεδίου \vec{F} πάνω στην επιφάνεια S** :

$$\int_S \vec{F} d\vec{\Phi} = \iint_D \vec{F} \cdot (\vec{T}_u \times \vec{T}_v) du dv$$

όπου τα διανύσματα \vec{T}_u και \vec{T}_v είναι τα εφαπτόμενα διανύσματα που ορίσαμε στην §7.3.

Η γεωμετρική ερμηνεία του επιφανειακού ολοκληρώματος β' είδους γίνεται κατανοητή αν θεωρήσουμε ένα ρευστό σώμα που περνά από την επιφάνεια. Εδώ εισάγεται και η έννοια της **προσανατολισμένης επιφάνειας**, δηλαδή μίας επιφάνειας που έχει δύο πλευρές (εσωτερική και εξωτερική) και σε κάθε σημείο της αντιστοιχούν δύο κάθετα διανύσματα (ένα για κάθε πλευρά) $\vec{T}_u \times \vec{T}_v$ και $-\vec{T}_u \times \vec{T}_v$. Αν όλα τα σημεία έχουν τον ίδιο

προσανατολισμό και το διανυσματικό πεδίο παριστά ένα πεδίο ταχυτήτων ή ένα ηλεκτρικό ή μαγνητικό πεδίο, το επιφανειακό ολοκλήρωμα ερμηνεύεται σαν **ο ρυθμός ροής** του ρευστού.

Θα αναφέρουμε τώρα δύο σημαντικά θεωρήματα που συνδέουν τα επιφανειακά ολοκληρώματα με τα τριπλά και τα επικαμπύλια ολοκληρώματα.

(1) **Θεώρημα απόκλισης του Gauss:** Έστω B μία στερεά περιοχή του \mathbf{R}^3 η οποία φράσσεται από μία κλειστή και προσανατολισμένη επιφάνεια S που ορίζεται από την $\vec{\Phi}(u, v)$. Αν \vec{F} ένα διανυσματικό πεδίο που ορίζεται στην περιοχή B , τότε ισχύει:

$$\int_S \vec{F} d\vec{\Phi} = \iiint_B (\operatorname{div} \vec{F}) dx dy dz = \iiint_B (\nabla \cdot \vec{F}) dx dy dz$$

(2) **Θεώρημα του Stokes:** Έστω S μία προσανατολισμένη επιφάνεια S που ορίζεται από την $\vec{\Phi}(u, v)$. Έστω επίσης μία κλειστή προσανατολισμένη καμπύλη c η οποία αποτελεί το σύνορο της S και ορίζεται από τη διανυσματική συνάρτηση $\vec{r}(t)$. Αν \vec{F} είναι ένα διανυσματικό πεδίο ορισμένο στην S , τότε ισχύει

$$\int_S (\operatorname{rot} \vec{F}) d\vec{\Phi} = \int_c \vec{F} d\vec{r}.$$

Παράδειγμα 7.8

Ας θεωρήσουμε την σφαίρα του Παραδείγματος 7.7 σαν επιφάνεια που δίνεται παραμετρικά για να υπολογίσουμε το επιφανειακό ολοκλήρωμα της $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, z)$.

Αφού υπολογίσουμε το

$$\vec{T}_\theta \times \vec{T}_\phi = (-\sin^2 \phi \cos \theta, -\sin^2 \phi \sin \theta, -\sin \phi \cos \phi),$$

υπολογίζουμε το εσωτερικό γινόμενο

$$\begin{aligned} \vec{F} \cdot (\vec{T}_\theta \times \vec{T}_\phi) &= (x, y, z) \cdot (-\sin^2 \phi \cos \theta, -\sin^2 \phi \sin \theta, -\sin \phi \cos \phi) \\ &= \cos \theta \sin \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \phi) \cdot (-\sin^2 \phi \cos \theta, -\sin^2 \phi \sin \theta, -\sin \phi \cos \phi) = -\sin \phi \end{aligned}$$

Άρα

$$\int_S \vec{F} d\vec{\Phi} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi -\sin \phi \, d\phi d\theta = -4\pi$$

Παράρτημα

**Ασκήσεις
και
Συμπληρωματική Θεωρία**

1. Σημεία και Διανύσματα στον Ευκλείδειο Χώρο

(1) Να βρεθούν τα σημεία $A+B$, $A-B$, $3A$, $-2B$ σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις:

(α) $A = (2, -1)$, $B = (-1, 1)$

(β) $A = (-1, 3)$, $B = (0, 4)$

(γ) $A = (2, -1, 5)$, $B = (-1, 1, 1)$

(δ) $A = (-1, -2, 3)$, $B = (-1, 3, -4)$

(ε) $A = (\pi, 3, -1)$, $B = (2\pi, -3, 7)$

(στ) $A = (15, -2, 4)$, $B = (\pi, 3, -1)$

Απάντηση:

	$A+B$	$A-B$	$3A$	$-2B$
(α)	(1,0)	(3,-2)	(6,-3)	(2,-2)
(β)	(-1,7)	(-1,-1)	(-3,9)	(0,-8)
(γ)	(1,0,6)	(3,-2,4)	(6,-3,15)	(2,-2,-2)
(δ)	(-2,1,-1)	(0,-5,7)	(-3,-6,9)	(2,-6,8)
(ε)	(3π,0,6)	(-π,6,-8)	(3π,9,-3)	(-4π,6,-14)
(στ)	(15+π,1,3)	(15-π,-5,5)	(45,-6,12)	(-2π,-6,2)

(2) Δίνονται τα σημεία $A = (1, 2)$ και $B = (3, 1)$. Να σχεδιάσετε τα σημεία $A+B$, $A+2B$, $A+3B$, $A-B$, $A-2B$, $A-3B$.

(3) Σε κάθε περίπτωση, καθορίστε ποια από τα παρακάτω διανύσματα \overrightarrow{PQ} και \overrightarrow{AB} είναι ισοδύναμα:

(α) $P=(1,-1)$, $Q=(4,3)$, $A=(-1,5)$, $B=(5,2)$

(β) $P=(1,4)$, $Q=(-3,5)$, $A=(5,7)$, $B=(1,8)$

(γ) $P=(1,-1,5)$, $Q=(-2,3,-4)$, $A=(3,1,1)$, $B=(0,5,10)$

(δ) $P=(2,3,-4)$, $Q=(-1,3,5)$, $A=(-2,3,-1)$, $B=(-5,3,8)$

Απάντηση:

Σε κάθε περίπτωση πρέπει να ισχύει: $Q - P = B - A$. Ισοδύναμα είναι στις περιπτώσεις (β) και (δ)

(4) Σε κάθε περίπτωση, καθορίστε ποια από τα παρακάτω διανύσματα \overrightarrow{PQ} και \overrightarrow{AB} είναι παράλληλα:

(α) $P=(1,-1)$, $Q=(4,3)$, $A=(-1,5)$, $B=(7,1)$

(β) $P=(1,4)$, $Q=(-3,5)$, $A=(5,7)$, $B=(9,6)$

(γ) $P=(1,-1,5)$, $Q=(-2,3,-4)$, $A=(3,1,1)$, $B=(-3,9,-17)$

(δ) $P=(2,3,-4)$, $Q=(-1,3,5)$, $A=(-2,3,-1)$, $B=(-11,3,-28)$

Απάντηση:

Σε κάθε περίπτωση πρέπει να ισχύει: $Q - P = r(B - A)$ όπου $r \in \mathbf{R}$. Παράλληλα είναι στις περιπτώσεις (β) και (γ)

(5) Από τις δύο προηγούμενες ασκήσεις, να σχεδιάσετε τα διανύσματα \overrightarrow{PQ} , \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{QP} και \overrightarrow{BA} των περιπτώσεων (α) και (β) της κάθε άσκησης. Επίσης, να σχεδιάσετε τα σημεία $Q-P$, $B-A$, $P-Q$, $A-B$.

(6) Να βρεθεί το $A \cdot B$ για τα παρακάτω διανύσματα:

(α) $A=(2,-1)$, $B=(-1,1)$

(β) $A=(-1,3)$, $B=(0,4)$

(γ) $A=(2,-1,5)$, $B=(-1,1,1)$

(δ) $A=(-1,-2,3)$, $B=(-1,3,-4)$

(ε) $A=(\pi,3,-1)$, $B=(2\pi,-3,7)$

(στ) $A=(15,-2,4)$, $B=(\pi,3,-1)$

Απάντηση:

(α) -3 , (β) 12 , (γ) 2 , (δ) -17 , (ε) $2\pi^2 - 16$, (στ) $15\pi - 10$

(7) Ποια από τα παρακάτω ζεύγη διανυσμάτων είναι κάθετα;

(α) $(1,-1,1)$ και $(2,1,5)$

(β) $(1,-1,1)$ και $(2,3,1)$

(γ) $(-5,2,7)$ και $(3,-1,2)$

(δ) $(\pi,2,1)$ και $(2,-\pi,0)$

Απάντηση:

Πρέπει να ισχύει $A \cdot B = 0$. Κάθετα είναι στις περιπτώσεις (β) και (δ)

(8) Ορίζουμε σαν εσωτερικό γινόμενο δύο συναρτήσεων f και g στο διάστημα $[-1,1]$:

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$$

(α) Να δείξετε ότι και εδώ ισχύουν οι γνωστές ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου:

$$\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle,$$

$$\langle f, g + h \rangle = \langle f, g \rangle + \langle f, h \rangle,$$

$$\langle cf, g \rangle = c\langle f, g \rangle,$$

αν $f = 0$ τότε $\langle f, f \rangle = 0$ και αν $f \neq 0$, $\langle f, f \rangle > 0$.

(β) Αν $f(x) = x$ και $g(x) = x^2$, να υπολογίσετε τα $\langle f, f \rangle$, $\langle g, g \rangle$, $\langle f, g \rangle$.

(γ) Να ορίσετε το εσωτερικό γινόμενο δύο συναρτήσεων στο διάστημα $[-\pi, \pi]$ με τον ίδιο τρόπο. Στη συνέχεια, να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε ακέραιους m και n οι συναρτήσεις $\cos(mx)$ και $\sin(nx)$ είναι "ορθογώνιες".

Απάντηση:

$$(β) \langle f, f \rangle = 2/3, \langle g, g \rangle = 2/5, \langle f, g \rangle = 0$$

(γ) $\langle f, g \rangle = 0$. Για το ολοκλήρωμα, να χρησιμοποιείτε την ταυτότητα

$$\cos(mx)\sin(nx) = \frac{1}{2}(\sin(n+m)x + \sin(n-m)x)$$

(9) Στα παρακάτω ζεύγη διανυσμάτων A και B να βρείτε: (i) $|A|$ και $|B|$, (ii) την προβολή του A πάνω στο B , (iii) την προβολή του B πάνω στο A .

$$(α) A=(2,-1), B=(-1,1)$$

$$(β) A=(-1,3), B=(0,4)$$

$$(γ) A=(2,-1,5), B=(-1,1,1)$$

$$(δ) A=(-1,-2,3), B=(-1,3,-4)$$

$$(ε) A=(\pi, 3, -1), B=(2\pi, -3, 7)$$

$$(στ) A=(15, -2, 4), B=(\pi, 3, -1)$$

Απάντηση:

	$ A $	$ B $	(ii)	(iii)
(α)	$\sqrt{5}$	$\sqrt{2}$	$\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$	$\left(-\frac{6}{5}, \frac{3}{5}\right)$
(β)	$\sqrt{10}$	4	(0,3)	$\left(-\frac{6}{5}, \frac{18}{5}\right)$
(γ)	$\sqrt{30}$	$\sqrt{3}$	$\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$	$\left(\frac{2}{15}, -\frac{1}{15}, \frac{1}{3}\right)$

Κ.Ο.Κ.

(10) Να βρείτε τα συνημίτονα των γωνιών του τριγώνου με κορυφές:

(α) (2,-1,1), (1,-3,-5), (3,-4,-4)

(β) (3,1,1), (-1,2,1), (2,-2,5)

Απάντηση:

(α) Αν $A=(2,-1,1)$, $B=(1,-3,-5)$, $\Gamma=(3,-4,-4)$ τότε

$$\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{B\Gamma}) = -\frac{6}{\sqrt{41} \cdot \sqrt{6}}, \quad \cos(\overrightarrow{B\Gamma}, \overrightarrow{\Gamma A}) = 0, \quad \cos(\overrightarrow{\Gamma A}, \overrightarrow{AB}) = \frac{35}{\sqrt{41} \cdot \sqrt{35}}.$$

(β) Όμοια βρίσκουμε $\frac{1}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{26}}, \frac{16}{\sqrt{41} \cdot \sqrt{17}}, \frac{25}{\sqrt{26} \cdot \sqrt{41}}$

(11) Έστω A_1, A_2, \dots, A_r είναι μη μηδενικά διανύσματα που είναι ανά δύο κάθετα, δηλ.

$A_i \cdot A_j = 0$ αν $i \neq j$. Έστω ακόμη c_1, c_2, \dots, c_r πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε

$$\sum_{i=1}^r c_i A_i = 0.$$

Να δείξετε ότι $c_i = 0$ για όλα τα $i = 1, \dots, r$.

Υπόδειξη:

Παίρνουμε το εσωτερικό γινόμενο και των δύο μελών της παραπάνω εξίσωσης με τυχαίο A_i οπότε προκύπτει ότι $c_i = 0$.

(12) Αν A και B είναι δυο τυχαία διανύσματα στον Ευκλείδειο n -χώρο, συμβολίζουμε με $d(A, B)$ την απόστασή τους, δηλ. $d(A, B) = |A - B|$. Να δείξετε ότι $d(A, B) = d(B, A)$ και ακόμη ότι για τρία διανύσματα A, B, C ισχύει:

$$d(A, B) \leq d(A, C) + d(B, C)$$

(13) Για οποιαδήποτε διανύσματα A και B στον Ευκλείδειο n -χώρο, αποδείξτε τις παρακάτω σχέσεις:

$$(\alpha) |A + B|^2 + |A - B|^2 = 2|A|^2 + 2|B|^2$$

$$(\beta) |A + B|^2 = |A|^2 + |B|^2 + 2A \cdot B$$

$$(\gamma) |A + B|^2 - |A - B|^2 = 4A \cdot B$$

(14) Να δείξετε ότι αν θ είναι η γωνία ανάμεσα στα διανύσματα A και B , τότε

$$|A - B|^2 = |A|^2 + |B|^2 - 2|A||B|\cos\theta$$

(15) Έστω A, B μη μηδενικά διανύσματα, κάθετα μεταξύ τους. Να δείξετε ότι για οποιονδήποτε αριθμό c έχουμε $|A + cB| \geq |A|$. Να δείξετε ότι ισχύει και το αντίστροφο, δηλ. αν για δύο οποιαδήποτε μη μηδενικά διανύσματα A, B ισχύει ότι $|A + cB| \geq |A|$ για κάθε $c \in \mathbb{R}$, τότε είναι κάθετα.

Υπόδειξη:

Για την απόδειξη της ανισότητας χρησιμοποιούμε τις σχέσεις

$$|A + cB| = \sqrt{(A + cB) \cdot (A + cB)} \quad \text{και} \quad A \cdot B = 0$$

Για το αντίστροφο, υποθέτουμε αρχικά ότι $A \cdot B > 0$. Από τη δεδομένη ανισότητα, προκύπτει ότι $2cA \cdot B + c^2B \cdot B \geq 0$ το οποίο ισχύει πάντοτε αν $c \geq 0$ και μόνο για $c \leq -\frac{2A \cdot B}{|B|^2}$ αν $c < 0$. Δηλ. η ανισότητα δεν ισχύει για κάθε $c \in \mathbb{R}$. Σε όμοιο άτοπο

φτάνουμε αν υποθέσουμε και ότι $A \cdot B < 0$.

(16) Αν $f(x) = x$ και $g(x) = x^2$, να χρησιμοποιήσετε τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου δύο συναρτήσεων στο $[-1,1]$ (άσκηση 8) για να βρείτε την προβολή της f πάνω στην g και την προβολή της g πάνω στην f .

Απάντηση:

Η προβολή της f πάνω στην g είναι cg όπου $c = \frac{\langle f, g \rangle}{\langle f, f \rangle}$. Εδώ $\langle f, g \rangle = 0$

(17) Αν στην προηγούμενη άσκηση το διάστημα ολοκλήρωσης είναι $[-\pi, \pi]$, να βρείτε το μέτρο των συναρτήσεων $\cos(mx)$ και $\sin(nx)$ από τη σχέση $\sqrt{\langle f, f \rangle}$.

Απάντηση:

$$\sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\langle g, g \rangle} = \sqrt{\pi}$$

(18) Να βρεθεί παραμετρική εξίσωση για την ευθεία που περνά από τα παρακάτω ζεύγη σημείων: (α) $(1, 1, -1)$ και $(-2, 1, 3)$ (β) $(-1, 5, 2)$ και $(3, -4, 1)$

Απάντηση:

(α) $X = (1, 1, -1) + t(-3, 0, 4)$ (β) $X = (-1, 5, 2) + t(4, -9, -1)$

(19) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας στον 2-χώρο που περνά από το σημείο P και είναι κάθετη στο A για τις παρακάτω περιπτώσεις:

(α) $A = (1, -1)$ και $P = (-5, 3)$ (β) $A = (-5, 4)$ και $P = (3, 2)$

Απάντηση:

(α) Βρίσκουμε διάνυσμα κάθετο στο A , π.χ. $B = (1, 1)$. $X = (-5, 3) + t(1, 1)$ ή $y = 8 + x$

(β) $4y = 5x - 7$

(20) Να δείξετε ότι οι ευθείες $3x - 5y = 1$ και $2x + 3y = 5$ δεν είναι κάθετες.

Υπόδειξη:

Να γράψετε τις ευθείες σε παραμετρική μορφή και να διαπιστώσετε ότι έχουν τη διεύθυνση των διανυσμάτων $(1, 3/5)$ και $(1, -2/3)$ αντίστοιχα τα οποία δεν είναι κάθετα.

(21) Να εξετάσετε ποια από τα παρακάτω ζεύγη ευθειών είναι κάθετα.

(α) $3x - 5y = 1$ και $2x + y = 2$

(β) $2x + 7y = 1$ και $x - y = 5$

(γ) $3x - 5y = 1$ και $5x + 3y = 7$

(δ) $-x + y = 2$ και $x + y = 9$

Απάντηση:

Κάθετα είναι τα ζεύγη (γ) και (δ)

(22) Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου που είναι κάθετο στο δεδομένο διάνυσμα N και περνά από το δεδομένο σημείο P .

(α) $N=(1,-1,3)$ και $P=(4,2,-1)$ (β) $N=(-3,-2,4)$ και $P=(2,\pi,-5)$

Απάντηση:

(α) $x - y + 3z = -1$ (β) $3x + 2y - 4z = 2\pi + 26$

(23) Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου που περνά από τα ακόλουθα 3 σημεία:

(α) $(2,1,1), (3,-1,1), (4,1,-1)$

(β) $(-2,3,-1), (2,2,3), (-4,-1,1)$

(γ) $(-5,-1,2), (1,2,-1), (3,-1,2)$

Απάντηση:

(α) $2x + y + 2z = 7$, (β) $7x - 8y - 9z = -29$, (γ) $y + z = 1$

(24) Να βρεθεί ένα διάνυσμα κάθετο στα διανύσματα $(1,2,-3)$ και $(2,-1,3)$.

Απάντηση:

Αρκεί να βρεθεί ένα διάνυσμα που το εσωτερικό του γινόμενο με τα δύο δεδομένα να είναι 0 ή απλά να βρούμε το εξωτερικό γινόμενο των δύο δεδομένων διανυσμάτων. Το ζητούμενο είναι $(3,-9,-5)$ και όλα τα παράλληλα σε αυτό.

(25) Έστω τα σημεία $P=(1,2,3,4)$ και $Q=(4,3,2,1)$ και το διάνυσμα $A=(1,1,1,1)$. Έστω επίσης L η ευθεία που περνά από το P και είναι παράλληλη στο A .

(α) Για δεδομένο σημείο X πάνω στη γραμμή L , να υπολογίσετε την απόσταση ανάμεσα στα Q και X σαν συνάρτηση της παραμέτρου t .

(β) Να δείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα σημείο X_0 στην ευθεία, τέτοιο ώστε η παραπάνω απόσταση να πετυχαίνει ένα ελάχιστο και ότι το ελάχιστο αυτό είναι $2\sqrt{5}$.

(γ) Να δείξετε ότι το διάνυσμα $X_0 - Q$ είναι κάθετο στην ευθεία.

Απάντηση:

$$X=(1,2,3,4)+t(1,1,1,1).$$

$$(α) |X - Q| = 2(t^2 + 5)^{1/2}$$

$$(β) \text{ Το ελάχιστο προκύπτει για } t = 0. \quad X_0 = (1,2,3,4)$$

$$(γ) (X_0 - Q) \cdot A = 0$$

(26) Να λύσετε την παραπάνω άσκηση αλλά για

$$P=(1,-1,3,1), \quad Q=(1,1,-1,2) \quad \text{και} \quad A=(1,-3,2,1).$$

Η ελάχιστη απόσταση είναι τώρα $\sqrt{146/15}$.

(27) Να βρείτε ένα διάνυσμα παράλληλο στην ευθεία που ορίζεται σαν τομή των επιπέδων $2x - y + z = 1$ και $3x + y + z = 2$.

Απάντηση:

Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων των δύο επιπέδων θέτοντας $x=t$. Η τομή τους έχει εξίσωση $X=(0,1/2,3/2)+t(1,-1/2,-5/2)$. Το ζητούμενο διάνυσμα είναι $(1,-1/2,-5/2)$.

(28) Να βρείτε παραμετρικές εξισώσεις για τις ευθείες που ορίζονται σαν τομή των επιπέδων: (α) $2x - y + z = 1$ και $3x + y + z = 2$ (β) $2x + y + 5z = 2$ και $3x - 2y + z = 3$

Απάντηση:

$$(α) \text{ Ίδια με την προηγούμενη άσκηση} \quad (β) X=(-10,-13,-17)+t(11,13,17)$$

(29) Να βρεθεί το συνημίτονο της γωνίας ανάμεσα στα παρακάτω επίπεδα:

$$(\alpha) \ x + y + z = 1, \quad x - y - z = 5 \qquad (\beta) \ 2x + 3y - z = 2, \quad x - y + z = 1$$

$$(\gamma) \ x + 2y - z = 1, \quad -x + 3y + z = 2 \qquad (\delta) \ 2x + y + z = 3, \quad -x - y + z = \pi$$

Απάντηση:

(α) Βρίσκουμε το συνημίτονο της γωνίας θ που σχηματίζουν τα κανονικά διανύσματα $A=(1,1,1)$ και $B=(1,-1,-1)$ των επιπέδων. $\cos\theta = -1/3$.

$$(\beta) \ -2/\sqrt{42}, \quad (\gamma) \ 4/\sqrt{66}, \quad (\delta) \ -2/\sqrt{18}$$

(30) Έστω $P=(1,3,5)$ και $A=(-2,1,1)$. Να βρείτε την τομή της ευθείας που περνά από το P στην κατεύθυνση του A , και του επιπέδου με εξίσωση $2x + 3y - z = 1$.

Απάντηση:

Η παραμετρική εξίσωση της ευθείας θα είναι $X=(1-2t,3+t,5+t)$. Αντικαθιστώντας τις συντεταγμένες αυτές στην εξίσωση του επιπέδου, βρίσκουμε $t=5/2$. Το ζητούμενο σημείο είναι $(-4,11/2,15/2)$

(31) Έστω $P=(1,2,-1)$. Να βρείτε την τομή του επιπέδου $3x - 4y + z = 2$ με την ευθεία που περνά από το P και είναι κάθετη στο επίπεδο.

Απάντηση:

Η ευθεία περνά από το P και έχει τη διεύθυνση του $(3,-4,1)$. Όμοια με την προηγούμενη άσκηση προκύπτει το σημείο τομής $(25/13,10/13,-9/13)$.

(32) Έστω $Q=(1,-1,2)$, $P=(1,3,-2)$ και $N=(1,2,2)$. Να βρείτε το σημείο της τομής της ευθείας που περνά από το P στη διεύθυνση του N και του επιπέδου που περνά από το Q και είναι κάθετο στο N .

Απάντηση:

Το σημείο τομής της ευθείας $X=(1+t,3+2t,-2+2t)$ και του επιπέδου $x+2y+2z=3$ είναι (όμοια με τις προηγούμενες ασκήσεις) το $(1,3,-2)$.

(33) Έστω δύο σημεία P, Q και ένα διάνυσμα N στον Ευκλείδειο 3-χώρο. Έστω επίσης P' το σημείο τομής της ευθείας που περνά από το P στη διεύθυνση του N και του επιπέδου που περνά από το Q και είναι κάθετο στο N . Ορίζουμε σαν απόσταση του P από το επίπεδο, την απόσταση ανάμεσα στα σημεία P και P' . Να βρείτε την απόσταση αυτή όταν $P=(1,3,5)$, $Q=(-1,1,7)$ και $N=(-1,1,-1)$.

Απάντηση:

Το σημείο τομής της ευθείας $X=(1-t, 3+t, 5-t)$ και του επιπέδου $-x+y-z=-5$ είναι $P'=(5/3, 7/3, 17/3)$ και η ζητούμενη απόσταση είναι $|P - P'| = 2/\sqrt{3}$.

(34) Με βάση τον ορισμό της απόστασης από σημείο που δόθηκε στην προηγούμενη άσκηση, να δείξετε ότι ο γενικός τύπος της απόστασης αυτής είναι $\frac{|(Q - P) \cdot N|}{|N|}$.

Υπόδειξη:

Χρησιμοποιώντας τις γενικές εξισώσεις της ευθείας και του επιπέδου έχουμε ότι για κάποιο t_0 ισχύει $(P + t_0 N) \cdot N = Q \cdot N$. Λύνοντας ως προς t_0 και αντικαθιστώντας στη σχέση $P' = P + t_0 N$ προκύπτει το ζητούμενο.

(35) Να βρείτε την απόσταση ανάμεσα στο σημείο και στο επίπεδο που δίνονται στις παρακάτω περιπτώσεις:

$$(α) (1,1,2) \text{ και } 3x + y - 5z = 2 \quad (β) (-1,3,2) \text{ και } 2x - 4y + z = 1$$

Απάντηση:

(α) Αρκεί να βρούμε τυχαίο σημείο Q του επιπέδου. Από την προηγούμενη άσκηση, η απόσταση είναι $8/\sqrt{35}$. (β) Όμοια βρίσκουμε $13/\sqrt{21}$

(36) Έστω $P=(1,3,-1)$ και $Q=(-4,5,2)$. Να βρείτε τις συντεταγμένες των παρακάτω σημείων:

(α) Το μέσον του ευθύγραμμου τμήματος PQ .

(β) Τα δύο σημεία στο ευθύγραμμο τμήμα PQ που βρίσκονται στο $1/3$ και στα $2/3$ της απόστασης από το P στο Q .

(γ) Το σημείο που βρίσκεται στο $1/5$ της απόστασης από το P στο Q .

(δ) Το σημείο που βρίσκεται στα $2/5$ της απόστασης από το P στο Q .

Απάντηση:

(α) $(-3/2, 4, 1/2)$, (β) $(-2/3, 11/3, 0)$ και $(-7/3, 13/3, 1)$, (γ) $(0, 17/5, -2/5)$, (δ) $(-1, 19/5, 1/5)$

(37) Αν P και Q είναι δύο τυχαία σημεία του Ευκλείδειου n -χώρου, να δώσετε έναν γενικό τύπο για το μέσον του ευθύγραμμου τμήματος PQ .

Απάντηση:

$$M = (P + Q)/2$$

(38) Να βρεθεί το $A \times B$ για τα παρακάτω διανύσματα:

(α) $A = (1, -1, 1)$ και $B = (-2, 3, 1)$

(β) $A = (-1, 1, 2)$ και $B = (1, 0, -1)$

(γ) $A = (1, 1, -3)$ και $B = (-1, -2, -3)$

Απάντηση:

(α) $(-4, -3, 1)$, (β) $(-1, 1, -1)$, (γ) $(-9, 6, -1)$

(39) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του παραλληλόγραμμου που σχηματίζουν τα παρακάτω ζεύγη διανυσμάτων:

(α) $A = (3, -2, 4)$ και $B = (5, 1, 1)$

(β) $A = (3, 1, 2)$ και $B = (-1, 2, 4)$

(γ) $A = (4, -2, 5)$ και $B = (3, 1, -1)$

(δ) $A = (-2, 1, 3)$ και $B = (2, -3, 4)$

Απάντηση:

Και στις 4 περιπτώσεις υπολογίζουμε το $|A \times B|$.

(40) Να δείξετε ότι δεν υπάρχουν σημεία (x, y, z) που να ικανοποιούν την εξίσωση $2x - 3y + z - 2 = 0$ και να ανήκουν στην ευθεία που περνά από το $(2, -2, -1)$ κατά τη διεύθυνση του $(1, 1, 1)$.

Υπόδειξη:

Δείξτε ότι οι παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας δεν επαληθεύουν την εξίσωση του επιπέδου για κανένα $t \in \mathbf{R}$.

(41) Να βρείτε τον όγκο του παραλληλεπίπεδου με πλευρές τα διανύσματα:

$$\vec{a} = 2\vec{x}_0 + \vec{y}_0 - \vec{z}_0, \quad \vec{b} = 5\vec{x}_0 - 3\vec{z}_0, \quad \vec{c} = \vec{x}_0 - 2\vec{y}_0 + \vec{z}_0$$

Απάντηση:

Αρκεί να υπολογίσουμε την απόλυτη τιμή του μικτού γινομένου των τριών διανυσμάτων που είναι 10.

(42) Να βρείτε μια εξίσωση για το επίπεδο που περιέχει τις ευθείες:

$$X = (0,1,-2) + t(2,3,-1) \text{ και } X = (2,-1,0) + t(2,3,-1)$$

Απάντηση:

Αρκεί να πάρουμε δύο σημεία στην πρώτη ευθεία και ένα στη δεύτερη (είναι παράλληλες) και στη συνέχεια να βρούμε το επίπεδο που περνά από αυτά. Η ζητούμενη εξίσωση είναι $-2x + 3y + 5z = -7$.

(43) Να βρείτε μια εξίσωση για το επίπεδο που περιέχει την ευθεία

$$X = (-1,1,2) + t(3,2,4)$$

και είναι κάθετο στο επίπεδο $2x + y - 3z + 4 = 0$.

Απάντηση:

$$10x - 17y + z = -25$$

(44) Να εκφράσετε τις επιφάνειες (α) $xz = 1$ και (β) $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ σε σφαιρικές συντεταγμένες.

Απάντηση:

$$(\alpha) \rho^2 \sin 2\phi \cos \theta = 2, \quad (\beta) -\rho^2 \cos 2\phi = 1$$

(45) (α) Δίνονται τα σημεία σε κυλινδρικές συντεταγμένες:

$$(1, 45^\circ, 1), (2, \pi/2, -4), (0, 45^\circ, 10), (3, \pi/6, 4), (1, -\pi/6, 0), (2, 3\pi/4, -2).$$

Να μετατραπούν σε ορθογώνιες και σφαιρικές συντεταγμένες.

(β) Δίνονται τα παρακάτω σημεία σε ορθογώνιες συντεταγμένες:

$$(2, 1, -2), (0, 3, 4), (\sqrt{2}, 1, 1), (-2\sqrt{3}, -2, 3).$$

Να μετατραπούν σε σφαιρικές και κυλινδρικές συντεταγμένες.

(46) Να ξαναγράψετε την εξίσωση $z = x^2 - y^2$ χρησιμοποιώντας κυλινδρικές και σφαιρικές συντεταγμένες.

2. Διανυσματικές συναρτήσεις πραγματικής μεταβλητής

(1) Δίνεται η διανυσματική συνάρτηση $\vec{r}(t) = \sin(t)\vec{x}_0 + \cos(t)\vec{y}_0 + t\vec{z}_0$. Να βρεθούν:

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt}, \quad \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}, \quad \left| \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right|, \quad \left| \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} \right|.$$

Απάντηση:

$$\cos(t)\vec{x}_0 - \sin(t)\vec{y}_0 + \vec{z}_0, \quad -\sin(t)\vec{x}_0 - \cos(t)\vec{y}_0, \quad \sqrt{2}, \quad 1$$

(2) Ένα κινητό σώμα κινείται κατά μήκος της καμπύλης

$$\vec{r}(t) = 2t^2\vec{x}_0 + (t^2 - 4t)\vec{y}_0 + (3t - 5)\vec{z}_0$$

όπου t είναι ο χρόνος. Να βρεθούν οι συνιστώσες των διανυσμάτων της ταχύτητας και της επιτάχυνσης τη χρονική στιγμή $t = 1$ κατά μήκος του διανύσματος

$$\vec{a} = \vec{x}_0 - 3\vec{y}_0 + 2\vec{z}_0.$$

Απάντηση:

$$4t\vec{x}_0 + (2t - 4)\vec{y}_0 + 3\vec{z}_0, \quad 4\vec{x}_0 + 2\vec{y}_0, \quad 8/7, \quad -2/7$$

(3) Δίνεται η συνάρτηση $\vec{r}(t) = \rho \cos(t)\vec{x}_0 + \rho \sin(t)\vec{y}_0$, $t \in [0, 2\pi]$. Ναδειχτεί ότι η $\vec{r}(t)$ είναι κάθετη στην παράγωγό της και να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που εφάπτεται στην καμπύλη στο σημείο $t = \pi$.

Απάντηση:

Βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{r}(t) \cdot \vec{r}'(t)$ ή αποδείξτε ότι το μέτρο της $\vec{r}(t)$ είναι σταθερό. Η ζητούμενη ευθεία είναι $\vec{l}(t) = -\rho\vec{x}_0 - \rho t\vec{y}_0$ ή $x = -\rho$.

(4) Η κίνηση σωματιδίου περιγράφεται από τη διανυσματική συνάρτηση

$$\vec{r}(t) = \cos(\omega t)\vec{x}_0 + \sin(\omega t)\vec{y}_0, \quad \omega = \text{σταθερό}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Να δειχτεί ότι:

(α) Η ταχύτητα \vec{v} είναι κάθετη στο διάνυσμα θέσης $\vec{r} \quad \forall t \in [0, 2\pi]$.

(β) Η επιτάχυνση $\vec{\gamma}$ κατευθύνεται προς το κέντρο και το μέτρο της είναι ανάλογο με την απόσταση από την αρχή των αξόνων.

(γ) $\vec{r} \times \vec{v} = \text{σταθερό διάνυσμα}$

(5) Να βρεθεί η ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε η διανυσματική συνάρτηση

$$\vec{r}(t) = \cos(\lambda t)\vec{a} + \sin(\lambda t)\vec{b},$$

όπου $\lambda \in \mathbf{R}$, $\lambda \neq 0$ και \vec{a}, \vec{b} σταθερά διανύσματα, να έχει σταθερή διεύθυνση.

Απάντηση:

Τα \vec{a}, \vec{b} πρέπει να είναι παράλληλα.

(6) Να δείξετε ότι (α) η διανυσματική συνάρτηση $\vec{r}(t) = \cos(t)\vec{x}_0 + \sin(t)\vec{y}_0 + \lambda\vec{z}_0$ έχει σταθερό μέτρο και (β) η $\vec{r}(t) = t^2\vec{x}_0 + (2/3)t^2\vec{y}_0 + (3/4)t^2\vec{z}_0$ έχει σταθερή διεύθυνση.

(7) Να δείξετε ότι για τη διανυσματική συνάρτηση $\vec{r}(t) = \cos(t)\vec{x}_0 + \sin(t)\vec{y}_0 + t\vec{z}_0$ ισχύει: (α) $|\vec{r} \times \vec{r}'| = \sqrt{2}$ και (β) $(\vec{r}', \vec{r}'', \vec{r}''') = 1$

(8) Να εξεταστεί αν υπάρχει σημείο της καμπύλης $\vec{r}(t) = (1-2t)\vec{x}_0 + t^2\vec{y}_0 + 2e^{2(t-1)}\vec{z}_0$, $t \in \mathbf{R}$, τέτοιο ώστε το εφαπτόμενο διάνυσμα να είναι παράλληλο με το διάνυσμα θέσης.

Απάντηση:

Αρκεί να βρούμε σε ποιο σημείο ισχύει $\vec{r} \times \vec{r}' = 0$. Προκύπτει $t = 1$.

(9) Αν ορίσουμε σαν γωνία δύο καμπυλών σε δεδομένο σημείο, τη γωνία που σχηματίζουν τα εφαπτόμενα διανύσματα των καμπυλών στο συγκεκριμένο σημείο, τότε να βρεθεί η γωνία των καμπυλών

$$c_1 : \vec{r}_1(t) = (e^t - 1, 2 \sin t, \ln(t+1)), \quad t > -1$$

$$c_2 : \vec{r}_2(\theta) = (\theta + 1, \theta^2 - 1, \theta^3 + 1), \quad \theta \in \mathbf{R}$$

στην αρχή των αξόνων.

Απάντηση:

$$\pi/2$$

(10) Έστω $\vec{r}(t)$ παραγωγίσιμη καμπύλη. Μία ευθεία (ή ένα επίπεδο) που είναι κάθετη(ο) στο διάνυσμα ταχύτητας $\vec{r}'(t)$ σε συγκεκριμένο σημείο t_0 , ονομάζεται κανονική(ό) στο t_0 . Να βρείτε (α) την εξίσωση μιας ευθείας κανονικής στην καμπύλη $\vec{r}(t) = (\cos 3t, \sin 3t)$ στο $t_0 = \pi/3$ και (β) την εξίσωση ενός επιπέδου κανονικού στην καμπύλη $\vec{r}(t) = (e^t, t, t^2)$ στο σημείο $t_0 = 1$.

Απάντηση:

$$(\alpha) y = 0, \quad (\beta) ex + y + 2z = e^2 + 3$$

(11) Έστω η παραγωγίσιμη καμπύλη $\vec{r}(t)$ η οποία βρίσκεται στην επιφάνεια σφαίρας με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 1. Ναδειχτεί ότι το διάνυσμα ταχύτητας είναι κάθετο με το διάνυσμα θέσης σε κάθε σημείο της καμπύλης.

Υπόδειξη:

Θεωρείστε $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ και παραγωγίζοντας τη σχέση $x^2(t) + y^2(t) + z^2(t) = 1$ αποδείξτε ότι $\vec{r}(t) \cdot \vec{r}'(t) = 0$.

(12) Έστω \vec{a}, \vec{b} δύο σταθερά μη μηδενικά διανύσματα. Έστω επίσης η διανυσματική συνάρτηση $\vec{r}(t) = e^{2t}\vec{a} + e^{-2t}\vec{b}$. Ναδειχτεί ότι το διάνυσμα $\vec{r}''(t)$ έχει ίδια κατεύθυνση με το $\vec{r}(t)$.

(13) Να βρεθούν τα σημεία στα οποία η καμπύλη $\vec{r}(t) = (2t^2, 1-t, 3+t^2)$ τέμνει το επίπεδο $3x - 14y + z - 10 = 0$.

Απάντηση:

Αντικαταστήστε στην εξίσωση του επιπέδου τις παραμετρικές εκφράσεις των x, y, z από την καμπύλη. Τα ζητούμενα σημεία είναι $(2, 0, 4)$ και $(18, 4, 12)$.

(14) Έστω $\vec{r}(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$ όπου a, b σταθερά. Έστω επίσης $\theta(t)$ η γωνία ανάμεσα στην εφαπτόμενη της καμπύλης σε κάθε σημείο και στον z -άξονα. Να αποδείξετε ότι η $\theta(t)$ είναι σταθερή.

Απάντηση:

$$\cos(\theta(t)) = b / \sqrt{a^2 + b^2}$$

(15) Έστω \vec{b}_0 ένα σταθερό μοναδιαίο διάνυσμα και $\vec{r}(t)$ μια καμπύλη για την οποία ισχύει $\vec{r}(t) \cdot \vec{b}_0 = e^{2t}$ για όλα τα t . Υποθέτουμε ακόμη ότι το διάνυσμα της ταχύτητας σχηματίζει σταθερή γωνία θ με το διάνυσμα \vec{b}_0 όπου $0 < \theta < \pi/2$.

(α) Να υπολογίσετε την ταχύτητα σε κάθε σημείο.

(β) Να εκφράσετε το $\vec{r}'(t) \cdot \vec{r}''(t)$ σαν συνάρτηση του t και του θ .

Απάντηση:

(α) Χρησιμοποιείτε τη σχέση που δίνει το συνημίτονο γωνίας δύο διανυσμάτων.

$$|\vec{r}'(t)| = \frac{2e^{2t}}{\cos \theta}, \quad (\beta) \quad \vec{r}'(t) \cdot \vec{r}''(t) = \frac{8e^{4t}}{\cos^2 \theta}$$

(16) Να αποδείξετε τις παρακάτω σχέσεις:

$$(\alpha) \quad \frac{d}{dt} [\vec{r}(t) \times \vec{r}'(t)] = \vec{r}(t) \times \vec{r}''(t)$$

$$(\beta) \quad \frac{d}{dt} [\vec{r}(t) \cdot (\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t))] = \vec{r}(t) \cdot (\vec{r}'(t) \times \vec{r}'''(t))$$

(17) Να βρεθεί το μήκος της κάθε μιας από τις παρακάτω καμπύλες στο αντίστοιχο διάστημα:

(α) $(\cos 4t, \sin 4t, t)$ από $t = 0$ έως $t = \pi/8$

(β) $(t, 2t, t^2)$ από $t = 1$ έως $t = 3$

(γ) $(e^{3t}, e^{-3t}, 3\sqrt{2}t)$ από $t = 0$ έως $t = 1/3$

Απάντηση:

(α) $\pi\sqrt{17}/8$, (β) $\frac{5}{4}\ln\left(\frac{6+\sqrt{41}}{5}\right) + \frac{3}{2}(\sqrt{41}-1)$, (γ) $e - \frac{1}{e}$

(18) Να δειχτεί ότι η καμπύλη

$$\vec{r}(t) = \frac{1}{2}(2 - \sin 2t)\vec{x}_0 + (\sin^2 t + 2)\vec{y}_0 + \cos t\vec{z}_0$$

βρίσκεται πάνω στη σφαίρα $(x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 1$ και να υπολογιστεί η καμπυλότητά της στο σημείο P_0 που αντιστοιχεί στην τιμή $t_0 = \pi/2$.

Απάντηση:

$k(\pi/2) = 1$

(19) Να δειχτεί ότι η καμπύλη $\vec{r}(t) = (1+3t+2t^2)\vec{x}_0 + (2-2t+5t^2)\vec{y}_0 + (1-t^2)\vec{z}_0$ είναι επίπεδη. Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου της.

Απάντηση:

Αρκεί να δείξουμε ότι σε κάθε σημείο η στρέψη είναι μηδέν. Η εξίσωση του επιπέδου είναι $2x + 3y + 19z = 27$

(20) Να δειχτεί ότι η καμπυλότητα και η στρέψη της καμπύλης $\vec{r}(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$ είναι ανεξάρτητες του t και ότι τις συνδέει η σχέση:

$$bk - a\sigma = 0$$

(21) Να βρεθεί η διανυσματική συνάρτηση για την οποία ισχύει:

$$\vec{r}(0) = -5\vec{y}_0 + \vec{z}_0 \quad \text{και} \quad \vec{r}'(t) = t\vec{x}_0 + e^t\vec{y}_0 + t^2\vec{z}_0$$

Απάντηση:

Ολοκληρώστε τις συντεταγμένες της παραγώγου της διανυσματικής συνάρτησης και

λάβετε υπόψη την συνθήκη. $\vec{r}(t) = \frac{t^2}{2}\vec{x}_0 + (e^t - 6)\vec{y}_0 + \left(\frac{t^3}{3} + 1\right)\vec{z}_0.$

(22) Ένα σωματίδιο ακολουθεί την καμπύλη $\vec{r}(t) = t^2\vec{x}_0 + (t^3 - 4t)\vec{y}_0$ την οποία εγκαταλείπει στη διεύθυνση της εφαπτομένης όταν $t = 2$. Να υπολογιστεί η θέση του σωματιδίου τη χρονική στιγμή $t = 3$.

Απάντηση:

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας στο $t = 2$ ως προς μία νέα παράμετρο τ και στη συνέχεια το διάνυσμα θέσης του σημείου για $\tau = 1$. Θα βρίσκεται στο σημείο (8, 8).

(23) Έστω $\vec{r}(t) = 2t\vec{x}_0 + t^2\vec{y}_0 + \ln(t)\vec{z}_0$ ορισμένη για $t > 0$. Να βρεθεί το μήκος του τόξου της $\vec{r}(t)$ ανάμεσα στα σημεία (2,1,0) και (4,4,ln2).

Απάντηση:

3+ln2

3. Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

(1) Να βρεθούν οι μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης των παρακάτω συναρτήσεων:

$$f(x, y) = xy, \quad f(x, y) = e^{xy}, \quad f(x, y) = x \cos x \cos y, \quad f(x, y) = (x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2)$$

(2) Δίνεται η συνάρτηση $f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$. Ναδειχτεί ότι ισχύει:

$$x \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = y \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = z \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

(3) Να υπολογιστεί η μερική παράγωγος $\frac{\partial^{(m+n)} f}{\partial x^m \partial y^n}$ της συνάρτησης

$$f(x, y, z) = \sin(ax + by + c)$$

Απάντηση:

Χρησιμοποιείτε τη σχέση $\cos \theta = \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$. Η ζητούμενη παράγωγος είναι

$$a^m b^n \sin\left(ax + by + c + (m+n)\frac{\pi}{2}\right).$$

(4) Αν η εξίσωση του επιπέδου που εφάπτεται σε επιφάνεια $z = f(x, y)$ στο σημείο $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ είναι

$$z = f(x_0, y_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right](x - x_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right](y - y_0)$$

να βρεθεί το επίπεδο που εφάπτεται (α) στην επιφάνεια $f(x, y) = x^2 + y^3$ στο σημείο $(3, 1, 10)$ και (β) στην επιφάνεια $f(x, y) = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$ στο σημείο $(0, 0, 0)$.

Απάντηση:

(α) $z = 6x + 3y - 11$ (β) $z = 2x + 2y$

(5) Να βρεθεί σε ποιο σημείο συναντά τον z-άξονα το εφαπτόμενο επίπεδο της $z = e^{x-y}$ στο $(1,1,1)$.

Απάντηση:

Στο $(0,0,1)$

(6) Ναδειχτεί ότι η συνάρτηση $u(x, y) = xf\left(\frac{y}{x}\right) + \phi\left(\frac{y}{x}\right)$ επαληθεύει τη διαφορική εξίσωση:

$$x^2 u_{xx} + 2xy u_{xy} + y^2 u_{yy} = 0$$

όπου f και ϕ είναι δύο συναρτήσεις και $u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $u_{yy} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$.

(7) Να βρεθεί με τον κανόνα της αλυσίδας η παράγωγος της σύνθετης συνάρτησης $f(x, y) = x^2 + y$, όπου $x = t \sin t$ και $y = \cos t$, ως προς τη μεταβλητή t .

Απάντηση:

$$\frac{df}{dt} = 2t \sin^2 t + 2t^2 \sin t \cos t - \sin t$$

(8) Να βρεθούν οι παράγωγοι πρώτης και δεύτερης τάξης ως προς x της συνάρτησης $f(x, y)$ όταν $y = \phi(x)$.

Απάντηση:

Με τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε:

$$\frac{df}{dx} = f_x + f_y y' \quad \text{και} \quad \frac{d^2 f}{dx^2} = f_{xx} + 2f_{xy} y' + f_{yy} (y')^2 + f_y y''$$

(9) Να βρεθεί με τον κανόνα της αλυσίδας η παράγωγος της σύνθετης συνάρτησης $f(x, y, z) = \sin(xz - y^2)$ όπου $x = t^2$, $y = \cos t$, $z = \sin(t^2)$.

(10) Να βρεθούν οι μερικές παράγωγοι ως προς u και v της $f(x, y) = \sin(x - y)$ όταν $x = uv$ και $y = u - v$.

Απάντηση:

$$f_u = (v - 1) \cos(x - y), \quad f_v = (u + 1) \cos(x - y)$$

(11) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε συνάρτηση $f(x, y)$ ισχύει για τις πολικές συντεταγμένες $x = r \cos \theta$ και $y = r \sin \theta$: $f_r^2 + \frac{1}{r^2} f_\theta^2 = f_x^2 + f_y^2$.

(12) Να βρεθούν οι μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης της συνάρτησης

$$f(x, y) = (x^2 - y)e^{x+y} \sin(x - y^2)$$

εκφράζοντάς την σαν σύνθετη συνάρτηση.

Απάντηση:

Θέτουμε $u = x^2 - y$, $v = x + y$ και $w = x - y^2$.

(13) Να υπολογιστεί η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = x^{x^x}$ εκφράζοντάς την σαν σύνθετη συνάρτηση.

Απάντηση:

Θέτουμε $u = x$, $v = x$, $w = x$ οπότε $f(u, v, w) = u^{v^w}$. $\frac{df}{dx} = x^{x^x+x} \left(\frac{1}{x} + \ln x + \ln^2 x \right)$

(14) Να βρεθεί η δεύτερη παράγωγος ως προς t της σύνθετης συνάρτησης

$$f(x, y, z) = x^2 + yz \quad \text{όπου} \quad x = \sin t, \quad y = \cos t, \quad z = t^3$$

(15) Έστω συνάρτηση $f(x, y)$ όπου $x = ue^v$ και $y = ue^{-v}$. Να δειχτεί ότι:

$$u^2 f_{uu} - u f_u + f_{vv} = 2(x^2 f_{xx} + y^2 f_{yy})$$

Μία συνάρτηση $f(x_1, \dots, x_n)$ ονομάζεται **ομογενής βαθμού a** όταν σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της ισχύει για κάθε $t > 0$:

$$f(tx_1, \dots, tx_n) = t^a f(x_1, \dots, x_n)$$

Μία ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι η συνάρτηση $f(x_1, \dots, x_n)$ ομογενής βαθμού a είναι: $x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = af$ (**Θεώρημα Euler**).

(16) Ναδειχτεί ότι η συνάρτηση $f(x, y) = x^4 + x^3y + 3x^2y^2 + 27y^4$ ικανοποιεί το θεώρημα Euler.

(17) Αν $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{y}}{z}$, να δείξετε ότι ισχύει: $xf_x + yf_y + zf_z = -\frac{1}{2}f(x, y, z)$.

(18) Να δείξετε ότι:

(α) Αν οι $x = \phi_1(u, v)$ και $y = \phi_2(u, v)$ είναι ομογενείς συναρτήσεις βαθμού a , τότε ισχύει για την τυχαία συνάρτηση $f(x, y)$: $uf_u + vf_v = a(xf_x + yf_y)$.

(β) Αν η $f(x, y, z)$ είναι ομογενής βαθμού a και $u(x, y, z) = \rho^v f(x, y, z)$ όπου $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$, ναδειχτεί η σχέση:

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = v(v + 2a + 1)\rho^{v-2}f(x, y, z) + \rho^v(f_{xx} + f_{yy} + f_{zz})$$

Μία συνάρτηση $f(x_1, \dots, x_n)$ λέγεται **αρμονική** αν ικανοποιεί την εξίσωση του

Laplace: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} = 0$.

(19) Να δείξετε ότι οι συναρτήσεις $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ και

$$g(x, y, z) = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}$$

είναι αρμονικές.

Ονομάζουμε **ολικό διαφορικό συνάρτησης** $f(x, y)$ την έκφραση $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$. Για συναρτήσεις τριών μεταβλητών $f(x, y, z)$ η αντίστοιχη

έκφραση είναι $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$.

Ακριβές ή τέλειο διαφορικό ονομάζεται μία παράσταση της μορφής $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ για την οποία υπάρχει μια συνάρτηση $f(x, y)$ τέτοια ώστε

$df = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$, δηλαδή υπάρχει συνάρτηση $f(x, y)$ με $\frac{\partial f}{\partial x} = P(x, y)$ και

$$\frac{\partial f}{\partial y} = Q(x, y).$$

Σύμφωνα με σχετικό θεώρημα, η έκφραση $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ είναι ακριβές διαφορικό αν και μόνο αν ισχύει η σχέση $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

Για να βρούμε τη συνάρτηση $f(x, y)$, λύνουμε το σύστημα $\frac{\partial f}{\partial x} = P(x, y)$ και

$\frac{\partial f}{\partial y} = Q(x, y)$ ολοκληρώνοντας τη μία εξίσωση και αντικαθιστώντας το αποτέλεσμα

στη δεύτερη. Στην ολοκλήρωση ως προς τη μία μεταβλητή προσέχουμε η σταθερά της ολοκλήρωσης να είναι συνάρτηση της άλλης μεταβλητής.

Η αντίστοιχη ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι η έκφραση $P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$ ακριβές διαφορικό είναι:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}$$

(20) Να δείξετε ότι η έκφραση $(e^x \cos y - e^y \sin x)dx + (e^y \cos x - e^x \sin y)dy$ είναι ακριβές διαφορικό και να βρείτε τη συνάρτηση για την οποία η δεδομένη έκφραση είναι το ολικό διαφορικό.

Απάντηση:

Ολοκληρώνοντας την $\frac{\partial f}{\partial x} = e^x \cos y - e^y \sin x$ ως προς x βρίσκουμε ότι

$f(x, y) = e^x \cos y + e^y \cos x + c(y)$. Αντικαθιστώντας στην $\frac{\partial f}{\partial y} = e^y \cos x - e^x \sin y$,

βρίσκουμε ότι $c(y) = c$.

(21) Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης $f(x, y) = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 + 1$ στο σημείο $P_0(3,1)$ και κατά τη διεύθυνση του διανύσματος $\overrightarrow{P_0P_1}$ όπου $P_1(6,5)$.

Απάντηση:

Βρείτε πρώτα το μοναδιαίο διάνυσμα που αντιστοιχεί στην δεδομένη διεύθυνση. Η ζητούμενη παράγωγος κατά κατεύθυνση είναι 0.

(22) Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης $f(x, y, z) = x \cos y \sin z$ στο σημείο $P_0(1, \pi, \pi/4)$ και κατά τη διεύθυνση του διανύσματος $\vec{v} = 2\vec{x}_0 - \vec{y}_0 + 4\vec{z}_0$.

(23) Να υπολογιστούν οι κλίσεις των παρακάτω συναρτήσεων:

$$f(x, y, z) = x \exp(-x^2 - y^2 - z^2), \quad f(x, y, z) = \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad f(x, y, z) = z^2 e^x \cos y$$

(24) Να εκφραστούν οι παρακάτω διαφορικοί τελεστές σε κανονική μορφή

$$(3D_1 + 2D_2)^2, \quad (D_1 + D_2 + D_3)^2, \quad (D_1 - D_2)(D_1 + D_2), \quad (D_1 + D_2)^3, \\ (2D_1 - 3D_2)(D_1 + D_2), \quad \left(2\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)^2$$

(25) Να βρεθούν οι τιμές του διαφορικού τελεστή $\left(2\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)^2$ αν εφαρμοστεί στις παρακάτω συναρτήσεις στο δοσμένο σημείο. Δοκιμάστε και τους δύο τρόπους εφαρμογής, δηλ. είτε απευθείας είτε μετά από μετατροπή σε κανονική μορφή.

(α) x^2y στο $(0,1)$ (β) xy στο $(1,1)$ (γ) $\sin(xy)$ στο $(0,\pi)$ (δ) e^{xy} στο $(0,0)$.

(26) Έστω $f(x, y, z) = 4x^2yz^3 - 5x^3y^4z + 7x^6y^{10}z^7$. Να υπολογιστεί η παράσταση

$$D_1^2 D_2 D_3^2 f(0,0,0)$$

(27) Να βρεθούν τα πολυώνυμα Taylor 2ου βαθμού για τις παρακάτω συναρτήσεις στο σημείο $O(0,0)$:

$$\sin(xy), \quad \cos(xy), \quad \ln(1+xy), \quad \sin(x^2+y^2), \quad e^{x+y}, \quad \cos(x^2+y), \quad \sin x \cos y, \\ e^x \sin y, \quad x+xy+2y^2$$

(28) Να βρεθεί το πολυώνυμο Taylor 3ου βαθμού για τη συνάρτηση $e^x \cos y$ στο $O(0,0)$.

Τρόπος εύρεσης των ακρότατων σημείων της $f(x_1, \dots, x_n)$:

Αφού βρούμε τις λύσεις του συστήματος $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0, \quad i=1, \dots, n$, και εντοπίσουμε τα κρίσιμα σημεία, για κάθε τέτοιο σημείο $P = (p_1, \dots, p_n)$ θεωρούμε τις ορίζουσες:

$$D_1 = f_{11}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad D_n = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \dots & f_{nn} \end{vmatrix}$$

όπου $f_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$, και ελέγχουμε τα πρόσημά τους.

Αν $D_i(p_1, \dots, p_n) > 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$ τότε έχουμε τοπικό ελάχιστο.

Αν $(-1)^i D_i(p_1, \dots, p_n) > 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$ τότε έχουμε τοπικό μέγιστο.

Σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση δεν έχουμε πληροφορία.

(29) Να εξεταστούν ως προς τα ακρότατα οι συναρτήσεις:

$$f(x, y) = 3axy - x^3 - y^3, \quad f(x, y) = x^4 + y^4, \quad f(x, y) = x^3 + y^3, \quad f(x, y) = (x - y)^2$$

Απάντηση:

(α) $(0,0)$ σαγματικό και (α, α) τοπικό μέγιστο αν $\alpha > 0$ και τοπικό ελάχιστο αν $\alpha < 0$.

(β) $(0,0)$ τοπικό ελάχιστο (γ) $(0,0)$ σαγματικό (δ) όλα τα (x,x) τοπικά ελάχιστα.

(30) Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4 - 4xyz$.

Απάντηση:

Κρίσιμα σημεία είναι $(0,0,0)$ το οποίο είναι σαγματικό σημείο (αρκεί να δείξουμε ότι γύρω από το σημείο αυτό η συνάρτηση αλλού έχει τιμές θετικές και αλλού αρνητικές) και τα $(1,1,1)$, $(1,-1,-1)$, $(-1,1,-1)$, $(-1,-1,1)$ που είναι όλα τοπικά ελάχιστα.

(31) Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης:

$$f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 + 3xy + 3yz + 3zx$$

Απάντηση:

Κρίσιμα σημεία $(0,0,0)$ που είναι σαγματικό και $(-2,-2,-2)$ που είναι τοπικό μέγιστο.

Τρόπος εύρεσης των ακρότατων σημείων της $f(x_1, \dots, x_n)$ κάτω από τη συνθήκη $g(x_1, \dots, x_n) = c$ με πολλαπλασιαστές Lagrange:

Αφού βρούμε τις λύσεις του συστήματος $\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, n$ και $g(x_1, \dots, x_n) = c$,

και εντοπίσουμε τα κρίσιμα σημεία, σχηματίζουμε τη βοηθητική συνάρτηση

$$h(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n) - \lambda g(x_1, \dots, x_n).$$

Στη συνέχεια, παίρνουμε την περιορισμένη Εσσιανή

$$\begin{vmatrix} 0 & -g_1 & -g_2 & \cdots & -g_n \\ -g_1 & h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1n} \\ -g_2 & h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -g_n & h_{n1} & h_{n2} & \cdots & h_{nn} \end{vmatrix}$$

όπου $g_i = \frac{\partial g}{\partial x_i}$ και $h_{ij} = \frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j}$.

Σε κάθε κρίσιμο σημείο εξετάζουμε τις ορίζουσες των διαγώνιων υποπινάκων τάξης ≥ 3 και ελέγχουμε τα πρόσημά τους.

Αν είναι όλες αρνητικές, τότε έχουμε τοπικό ελάχιστο.

Αν η πρώτη είναι θετική και οι υπόλοιπες έχουν εναλλασσόμενα πρόσημα, τότε έχουμε τοπικό μέγιστο.

Σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση δεν έχουμε πληροφορία.

(32) Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x, y, z) = \frac{1}{x} + \frac{4}{y} + \frac{9}{z}$ όταν $x > 0$,

$y > 0$, $z > 0$ και ισχύει η σχέση: $x + y + z = 12$.

Απάντηση:

Το σημείο (2,4,6) είναι τοπικό ελάχιστο.

(33) Να βρεθεί η μέγιστη τιμή του γινομένου τριών θετικών αριθμών που έχουν σταθερό άθροισμα.

Απάντηση:

Το μέγιστο της συνάρτησης $f(x, y, z) = xyz$ κάτω από τη συνθήκη $g(x, y, z) = x + y + z = c$ επιτυγχάνεται στο σημείο $(c/3, c/3, c/3)$.

(34) Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ αν $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2}$.

Απάντηση:

Στο $(a\sqrt{2}, a\sqrt{2})$ έχει τοπικό μέγιστο και στο $(-a\sqrt{2}, -a\sqrt{2})$ τοπικό ελάχιστο.

(35) Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ όταν $z(x + y) + 2 = 0$ και $xy - 1 = 0$.

Απάντηση:

Στα σημεία (1,1,-1) και (-1,-1,1) έχουμε τοπικά ελάχιστα.

Ελαχιστοποίηση συνάρτησης με μια μέθοδο μαθηματικού προγραμματισμού

Πρόβλημα: Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή συνάρτησης $f(x_1, \dots, x_n)$ η οποία είναι συνεχής και έχει συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης.

Μέθοδοι που χρησιμοποιούν την κλίση (gradient methods):

Στη διεύθυνση του ∇f μεγαλύτερη αύξηση,
στη διεύθυνση του $-\nabla f$ την μεγαλύτερη μείωση



Αναζήτηση (προσέγγιση) του ελάχιστου στην διεύθυνση του $-\nabla f$ με ακολουθία σημείων $X^0, X^1, \dots, X^k, \dots$

Αλγόριθμος της πιο απότομης καθόδου (steepest descent):

Επιλέγουμε αρχικό σημείο $X^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ και δημιουργούμε την ακολουθία $X^0, X^1, \dots, X^k, \dots$ μεταβαίνοντας από το X^k στο X^{k+1} με την παρακάτω διαδικασία:

Βήμα 1 Υπολογίζουμε την κλίση $\nabla f(X^k)$

Βήμα 2 Υπολογίζουμε την διεύθυνση μετάβασης:

$$d_k = - \frac{\nabla f(X^k)}{|\nabla f(X^k)|}$$

Βήμα 3 Υπολογίζουμε το μήκος βήματος λ_k λύνοντας το πρόβλημα

$$f(X^k + \lambda_k d_k) = \min_{\lambda > 0} f(X^k + \lambda d_k).$$

Π.χ. Λύνοντας την $\frac{df(X^k + \lambda d_k)}{d\lambda} = 0$

Βήμα 4 Εντοπίζουμε το επόμενο σημείο $X^{k+1} = X^k + \lambda_k d_k$

Βήμα 5 Ελέγχουμε κριτήριο τερματισμού (σύγκλισης). Αν αληθεύει, ο αλγόριθμος σταματά. Διαφορετικά πηγαίνουμε στο Βήμα 1.

Κριτήρια σύγκλισης

$$\max_{i=1,\dots,n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| < \varepsilon, \quad |\nabla f|^2 < \varepsilon, \quad |f(X^{k+1}) - f(X^k)| < \varepsilon$$

Παράδειγμα: Εύρεση του ελάχιστου $f(1,3,-5) = 0$ της

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 3)^2 + 4(x_3 + 5)^2$$

Βήμα 1 Αρχικό σημείο: $X^0 = (4, -1, 2)$

Βήμα 2 $\nabla f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - 2, 2x_2 - 6, 8x_3 + 40),$

$$\nabla f(4, -1, 2) = (6, -8, 56) \quad \text{και} \quad |\nabla f(4, -1, 2)| = 56,8859$$

Διεύθυνση: $d_0 = (-0.1055, 0.1406, -0.9844)$

Βήμα 3

$$f(X^0 + \lambda d_0) = \left(3 - \frac{3\lambda}{\sqrt{809}} \right)^2 + \left(-4 + \frac{4\lambda}{\sqrt{809}} \right)^2 + 4 \left(7 - \frac{28\lambda}{\sqrt{809}} \right)^2$$

$$\frac{df(X^0 + \lambda d_0)}{d\lambda} = 0 \Rightarrow \lambda_0 = 7.2794$$

$$X^1 = X^0 + \lambda_0 d_0 = (3.2322, 0.0237, -5.1661)$$

.....Κ.Ο.Κ.....

Σ.3. Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

k	X^k	λ_k	d_k	$f(X^k)$
0	(4, -1, 2)	7.2794	(-0.1055, 0.1406, -0.9844)	221
1	(3.2322, 0.0237, -5.1661)	3.4586	(-0.5907, 0.7875, 0.1758)	13.9513
2	(1.1894, 2.7475, -4.5581)	0.4595	(-0.1055, 0.1406, -0.9844)	0.8807
3	(1.1409, 2.8121, -5.0105)	0.2183	(-0.5907, 0.7875, 0.1758)	0.0556
4	(1.0120, 2.9841, -4.9721)	0.0290	(-0.1055, 0.1406, -0.9844)	0.0035
5	(1.0089, 2.9881, -5.0007)	0.0138	(-0.5907, 0.7875, 0.1758)	2.2157e-004
6	(1.0008, 2.9990, -4.9982)	0.0018	(-0.1055, 0.1406, -0.9844)	1.3987e-005
7	(1.0006, 2.9993, -5.0000)	8.7e-004	(-0.5907, 0.7875, 0.1758)	8.8297e-007
8	(1.0000, 2.9999, -4.9999)	1.16e-004	(-0.1055, 0.1406, -0.9844)	5.5740e-008
9	(1.0000, 3.0000, -5.0000)			3.5188e-009

4. Διανυσματικά πεδία

(1) Να βρεθεί η κλίση των συναρτήσεων: (α) και (β)

όπου

Απάντηση:

(α) και (β)

(2) Να υπολογιστεί η απόκλιση του διανυσματικού πεδίου

στο σημείο (1, -1, 1).

Απάντηση:

-3

(3) Να υπολογιστεί η περιστροφή του διανυσματικού πεδίου

στο σημείο (2, -1, -2).

Απάντηση:

(24, 24, -16)

(4) Αν να βρεθεί η αν είναι ακόμη γνωστό ότι

Απάντηση:

(5) Να υπολογιστεί η απόκλιση του διανυσματικού πεδίου

Απάντηση:

(6) Να δείξετε ότι το διανυσματικό πεδίο

δεν είναι σωληνοειδές ενώ το είναι.

(7) Έστω . Να δείξετε ότι η περιστροφή του δεν είναι πάντοτε μηδενικό διάνυσμα αλλά ισχύει . Είναι δυνατό να είναι το πεδίο κλίσεων;

Αν είναι ένα διανυσματικό πεδίο, τότε μία καμπύλη με διανυσματική εξίσωση ονομάζεται γραμμή ροής ή ολοκληρωτική καμπύλη του διανυσματικού πεδίου αν ισχύει:

ή

(8) Να βρεθούν οι γραμμές ροής του διανυσματικού πεδίου

Απάντηση:

όπου σταθερές.
 a, b, c

(9) Δίνεται το διανυσματικό πεδίο

και μία πραγματική συνάρτηση τριών μεταβλητών . Να δείξετε τη σχέση:

(10) Δίνεται το διανυσματικό πεδίο

Να βρεθεί η επιφάνεια επάνω στην οποία είναι σωληνοειδές.

Απάντηση:

Επάνω στην επιφάνεια του κυλίνδρου

(11) Να υπολογιστούν οι σταθερές κ , λ , μ ώστε το διανυσματικό πεδίο

να είναι αστρόβιλο.

Απάντηση:

$$\kappa = 4, \quad \lambda = 2, \quad \mu = -1$$

(12) Αν , να υπολογιστούν:

(α)

(β)

Απάντηση:

(α)

(β)

5. Διπλά ολοκληρώματα

(1) Να βρεθεί το διπλό ολοκλήρωμα της συνάρτησης $f(x, y) = x^2 + y^2$ πάνω από την περιοχή D που φράσσεται από την ευθεία $y = x$ και την παραβολή $y = x^2$.

Απάντηση:

Με διαδοχική ολοκλήρωση προκύπτει $3/35$

(2) Να βρεθεί το διπλό ολοκλήρωμα της συνάρτησης $f(x, y) = 2xy$ πάνω από την τριγωνική περιοχή D που φράσσεται από τις ευθείες $y = 0$, $y = x$ και $x + y = 2$.

Υπόδειξη:

Χωρίστε την περιοχή σε δύο μικρότερες με την ευθεία $x = 1$.

(3) Να βρεθεί το εμβαδόν της περιοχής D που φράσσεται από την ευθεία $y = x$ και την παραβολή $y = x^2$ με διπλή ολοκλήρωση.

Απάντηση:

$1/6$

(4) Να βρεθεί το διπλό ολοκλήρωμα της συνάρτησης $f(x, y) = x^2 y^2$ πάνω από την περιοχή που φράσσεται από τις ευθείες $y = 1$, $y = 2$ και $x = y$

Απάντηση:

$7/2$

(5) Να βρεθεί η μάζα ενός κυκλικού δίσκου ακτίνας a αν η πυκνότητα σε κάθε σημείο είναι ανάλογη με το τετράγωνο της απόστασης από ένα δεδομένο σημείο πάνω στην περιφέρεια του κύκλου.

Απάντηση:

Θεωρείστε τον δίσκο με κέντρο το $(0,0)$ και ακτίνα a και σαν δεδομένο σημείο αναφοράς το $(a,0)$. Η ζητούμενη μάζα είναι $(3/2)k\pi a^4$ όπου k σταθερό.

(6) Να βρεθούν τα ολοκληρώματα των παρακάτω συναρτήσεων:

(α) $x \cos(x+y)$ πάνω από το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία $(0,0)$, $(\pi,0)$, (π,π) .

(β) e^{x+y} πάνω από την περιοχή που ορίζεται από την $|x|+|y| \leq 1$

(γ) $x^2 - y^2$ πάνω από την περιοχή που φράσσεται από την καμπύλη $y = \sin x$ ανάμεσα στο 0 και στο π .

(δ) $x^2 + y$ πάνω από το τρίγωνο με κορυφές $(-1/2, 1/2)$, $(1,2)$, $(1,-1)$.

Απάντηση:

(α) $-3\pi/2$ (β) $e-1/e$ (γ) $\pi^2 - 40/9$ (δ) $63/32$

(7) Έστω a ένας θετικός αριθμός. Να δείξετε ότι το εμβαδόν της περιοχής που αποτελείται από όλα τα σημεία (x,y) για τα οποία ισχύει $|x|+|y| \leq a$, είναι $(2a)^2 / 2$.

(8) Σχεδιάστε την περιοχή που ορίζεται από τις σχέσεις:

$$x \geq 0, \quad x^2 + y^2 \leq 2 \quad \text{και} \quad x^2 + y^2 \geq 1.$$

Να υπολογίσετε πάνω από αυτή την περιοχή το διπλό ολοκλήρωμα της $f(x,y) = x^2$.

Υπολογίστε το με δύο τρόπους. Σαν διαδοχικό και κατόπιν με αλλαγή μεταβλητών.

Απάντηση:

$3\pi/8$

(9) Να βρεθούν τα ολοκληρώματα των παρακάτω συναρτήσεων:

(α) $f(x,y) = 1/(x+y)$ πάνω από την περιοχή που φράσσεται από τις ευθείες $y = x$, $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$.

(β) $f(x, y) = x^2 - y^2$ πάνω από την περιοχή που ορίζεται από τις ανισότητες:

$$0 \leq x \leq 1 \quad \text{και} \quad x^2 - y^2 \geq 0$$

(γ) $f(x, y) = x \sin xy$ πάνω από το ορθογώνιο $0 \leq x \leq \pi$ και $0 \leq y \leq 1$

(δ) $f(x, y) = x^2 - y^2$ πάνω από το τρίγωνο με κορυφές $(-1, 1)$, $(0, 0)$, $(1, 1)$

(ε) $f(x, y) = 1/(1 + x + y)$ πάνω από το τετράγωνο $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$.

Απάντηση:

(α) $\ln 2$ (β) $1/3$ (γ) π (δ) $-1/3$ (ε) $\ln(27/16)$

(10) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα της συνάρτησης $f(x, y) = xy$ πάνω από την περιοχή που ορίζεται από τις ανισότητες

$$x^2 + y^2 \leq 1, \quad x \geq 0, \quad y \geq 1/2.$$

Απάντηση:

9/128

(11) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int_0^2 \int_0^{x^2/2} \frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}} dy dx$.

Απάντηση:

Αλλάξτε τη σειρά ολοκλήρωσης εκφράζοντας την παραβολή $y = x^2/2$ σαν $x = \sqrt{2y}$.

Το αποτέλεσμα είναι: $-1 + (5/4)\ln 5$

(12) Να βρεθεί με διπλή ολοκλήρωση ο όγκος του στερεού που περιέχεται ανάμεσα στις επιφάνειες $z = x^2$ και $z = 4 - x^2 - y^2$.

Απάντηση:

Η περιοχή ολοκλήρωσης προκύπτει μετά από απαλοιφή του z από τις δύο εξισώσεις των επιφανειών και είναι η περιοχή που φράσσεται από την έλλειψη $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1$. Ο ζητούμενος όγκος είναι $4\pi\sqrt{2}$.

(13) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα της $f(x, y) = \exp(x^2 + y^2)$ πάνω από την περιοχή που ορίζεται από την ανισότητα $x^2 + y^2 \leq 1$. Να κάνετε αλλαγή σε πολικές συντεταγμένες.

Απάντηση:

$$(e-1)\pi$$

(14) Να βρείτε τον όγκο της περιοχής πάνω από τον δίσκο $x^2 + (y-1)^2 \leq 1$ και μέχρι την επιφάνεια $z = x^2 + y^2$.

Απάντηση:

Αλλάξτε σε πολικές συντεταγμένες. $3\pi/2$

(15) Να υπολογιστεί το εμβαδόν της επιφάνειας που περικλείεται από το καρδιοειδές $r = 1 - \cos \theta$ με τη βοήθεια διπλού ολοκληρώματος.

Απάντηση:

$$3\pi/2$$

(16) Να βρείτε το εμβαδόν της περιοχής που βρίσκεται στο εσωτερικό της καμπύλης με εξίσωση (σε πολικές συντεταγμένες) $r = a(1 + \cos \theta)$ και έξω από τον κύκλο $r = a$. Στη συνέχεια να θεωρήσετε την παραπάνω περιοχή σαν βάση ενός στερεού με "οροφή" που δίνεται από τη συνάρτηση $f(x, y) = x$ και να βρείτε τον όγκο του.

Απάντηση:

$$a^2(\pi + 8)/4, \quad a^3(15\pi + 32)/24$$

(17) Να βρείτε το εμβαδόν της περιοχής που περικλείεται από την καμπύλη $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$. Στη συνέχεια, να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που έχει την περιοχή αυτή σαν βάση και τη συνάρτηση $f(r, \theta) = \sqrt{2a^2 - r^2}$ σαν "οροφή".

Απάντηση:

$$2a^2, \frac{8\sqrt{2}}{3}a^3\left(-\frac{1}{3} + \frac{\pi}{4}\right)$$

(18) Να βρεθεί το ολοκλήρωμα της συνάρτησης $f(x, y) = \frac{1}{(x^2 + y^2)^3}$ πάνω από την περιοχή (κυκλικό δακτύλιο) ανάμεσα σε δύο κύκλους ακτίνας 2 και 3 με κέντρο το (0,0).

Απάντηση:

$$\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2^4} - \frac{1}{3^4}\right)$$

(19) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα της $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ πάνω από την περιοχή που ορίζεται από την ανισότητα: $x^2 + y^2 \leq 2x$.

Απάντηση:

Η περιοχή ολοκλήρωσης είναι κυκλικός δίσκος με κέντρο (1,0) και ακτίνα 1. Αλλάξτε σε πολικές συντεταγμένες. 32/9.

(20) Να υπολογιστεί το διπλό ολοκλήρωμα της συνάρτησης $f(x, y) = (x-1)(y-2)$ πάνω από την περιοχή που ορίζεται από τις ανισότητες $|x-1| \leq 1$ και $|y-2| \leq 1$ με την αλλαγή των μεταβλητών $x-1 = u$ και $y-2 = v$. Σχεδιάστε κάθε φορά τις περιοχές ολοκλήρωσης.

Απάντηση:

0

(21) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα της συνάρτησης $f(x, y) = \exp\left(\frac{y}{x+y}\right)$ πάνω από την περιοχή που περικλείεται από τους θετικούς ημιάξονες και τις ευθείες $x+y=1$ και $x+y=2$ με τη βοήθεια του μετασχηματισμού $x+y=u$ και $y=uv$.

Απάντηση:

$$(3/2)(e-1)$$

(22) Να υπολογιστεί το εμβαδόν περιοχής που περικλείεται από τις παραβολές $y^2 = 2p_1x$ και $y^2 = 2p_2x$, $0 < p_1 < p_2$ και τις υπερβολές $xy = a_1$ και $xy = a_2$, $0 < a_1 < a_2$.

Απάντηση:

Χρησιμοποιείτε τον μετασχηματισμό $u = xy$, $v = y^2 / 2x$ και την ιδιότητα των Ιακωβιανών οριζουσών $\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = 1 / \frac{D(u, v)}{D(x, y)}$. Το εμβαδόν είναι $\frac{(a_2 - a_1) \ln(p_2 / p_1)}{3}$.

(23) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα της $f(x, y) = x^3 y + \cos x$ πάνω από την περιοχή που ορίζεται από τις ανισότητες $0 \leq x \leq \pi/2$ και $0 \leq y \leq x$.

(24) Να υπολογιστεί το διπλό ολοκλήρωμα της συνάρτησης $f(x, y) = x + y$ πάνω από την περιοχή που φράσσεται από τους θετικούς ημιάξονες και τις ευθείες $y = 4 - x$ και $y = 6 - 2x$.

Απάντηση:

Χωρίστε την περιοχή ολοκλήρωσης σε δύο μικρότερες με φέροντας την ευθεία $x = 2$ και εφαρμόστε διαδοχικές ολοκληρώσεις. Η τιμή του ζητούμενου ολοκληρώματος είναι $53/3$.

(25) Να υπολογιστεί με διπλή ολοκλήρωση ο όγκος του στερεού που περικλείεται από τα επίπεδα: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ και $x + y + z = 1$.

Απάντηση:

Το στερεό είναι ένα τετράεδρο με κορυφές τα σημεία $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ και $(0,0,0)$. Η βάση του (περιοχή ολοκλήρωσης) είναι τρίγωνο που σχηματίζεται από τους θετικούς ημιάξονες και την ευθεία $x + y = 1$. Το ζητούμενο είναι $1/6$.

(26) Να βρεθεί το κέντρο μάζας της ομογενούς περιοχής (δηλ. η πυκνότητα είναι σταθερή) που ορίζεται από τις ανισότητες $x \geq 0$, $y \geq 0$ και $x^2 + y^2 \leq a^2$.

Απάντηση:

$(4a/(3\pi), 4a/(3\pi))$

(27) Να εξεταστεί για ποιες τιμές της παραμέτρου $k > 0$ συγκλίνουν τα παρακάτω γενικευμένα ολοκληρώματα:

(α) Της συνάρτησης $\frac{1}{(x^2 + y^2)^k}$ πάνω από τον δίσκο $x^2 + y^2 \leq 1$.

(β) Της συνάρτησης $\frac{1}{(x^2 + y^2)^k}$ πάνω από την περιοχή $x^2 + y^2 \geq 1$.

(γ) Της συνάρτησης $\frac{1}{(1 - x^2 - y^2)^k}$ πάνω από τον δίσκο $x^2 + y^2 \leq 1$.

Απάντηση:

(α) για $k < 1$ συγκλίνει στο $\frac{\pi}{1-k}$ (β) για $k > 1$ συγκλίνει στο $\frac{\pi}{k-1}$ (γ) για $k < 1$

συγκλίνει στο $\frac{\pi}{1-k}$

Κριτήριο σύγκρισης για τη σύγκλιση γενικευμένων ολοκληρωμάτων:

Σε κάθε περίπτωση γενικευμένου ολοκληρώματος $\iint_D f(x, y) dx dy$ αν υπάρχει

$\phi(x, y) \geq |f(x, y)|$ τότε:

Αν συγκλίνει το $\iint_D \phi(x, y) dx dy \Rightarrow$ συγκλίνει και το $\iint_D f(x, y) dx dy$.

Αν δε συγκλίνει το $\iint_D f(x, y) dx dy \Rightarrow$ δε συγκλίνει και το $\iint_D \phi(x, y) dx dy$.

(28) Να εξεταστεί αν συγκλίνει το ακόλουθο γενικευμένο ολοκλήρωμα:

$$\iint_D \frac{\sin xy}{x^2(1+y^2)} dx dy$$

όπου D είναι η μη φραγμένη περιοχή που ορίζεται από τις ανισότητες: $x \geq 1$ και $0 \leq y \leq 1$.

Απάντηση:

Χρησιμοποιείστε το κριτήριο σύγκρισης με $\phi(x, y) = \frac{1}{x^2(1+y^2)}$.

$$\iint_D \phi(x, y) dx dy = \pi/4.$$

(29) Να υπολογιστεί το γενικευμένο ολοκλήρωμα: $\iint_D (x+y)e^{-(x+y)} dx dy$ όπου D η

περιοχή που ορίζεται από τις ανισότητες $x \geq 0$ και $y \geq 0$.

Απάντηση:

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα της συνάρτησης στην ακολουθία των φραγμένων περιοχών που ορίζονται από τις ανισότητες $0 \leq x \leq n$ και $0 \leq y \leq n$. Στη συνέχεια υπολογίστε το όριο όταν $n \rightarrow \infty$. Αποτέλεσμα: 2

(30) Να υπολογιστεί το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\iint_D \frac{y}{\sqrt{x}} dx dy$ όπου D η ορθογώνια

περιοχή $[0,1] \times [0,1]$.

Απάντηση:

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα πάνω από την περιοχή $[1/n, 1] \times [0,1]$ και στη συνέχεια το όριο όταν $n \rightarrow \infty$. Αποτέλεσμα: 1.

6. Τριπλά ολοκληρώματα

(1) Να υπολογιστεί το τριπλό ολοκλήρωμα της συνάρτησης $f(x, y, z) = (x + y + z + 1)^{-3}$ στην στερεά περιοχή που φράσσεται από τα επίπεδα $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ και $x + y + z = 1$.

Απάντηση:

Η στερεά περιοχή ορίζεται από τις ανισότητες $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1 - x$ και $0 \leq z \leq 1 - x - y$. Με διαδοχική ολοκλήρωση προκύπτει $\frac{\ln 2}{2} - \frac{5}{16}$.

(2) Να υπολογιστεί με τριπλή ολοκλήρωση ο όγκος του στερεού που περικλείεται από τις επιφάνειες $z = 4 - x^2 - y^2$ και $z = 0$.

Απάντηση:

Αλλάξτε σε κυλινδρικές συντεταγμένες οπότε το στερεό που ορίζεται από τις $x^2 + y^2 \leq 4$ και $0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2$, εκφράζεται από τις σχέσεις $0 \leq r \leq 2$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ και $0 \leq z \leq 4 - r^2$. Αποτέλεσμα: 8π

(3) Να υπολογιστεί με τριπλή ολοκλήρωση ο όγκος του στερεού που περιέχεται ανάμεσα στις επιφάνειες $z = 8 - x^2 - y^2$ και $z = x^2 + 3y^2$.

Απάντηση:

Από τις δύο επιφάνειες απαλείφοντας το z , βρίσκουμε ότι οι δύο επιφάνειες τέμνονται στην έλλειψη $x^2 + 2y^2 = 4$. Η περιοχή ολοκλήρωσης ορίζεται από τις ανισότητες:

$-2 \leq x \leq 2$, $-\sqrt{\frac{4-x^2}{2}} \leq y \leq \sqrt{\frac{4-x^2}{2}}$ και $x^2 + 3y^2 \leq z \leq 8 - x^2 - y^2$. Στο τελευταίο

από τα διαδοχικά ολοκληρώματα εφαρμόστε την αντικατάσταση $x = 2 \sin t$.

Αποτέλεσμα: $8\pi\sqrt{2}$

(4) Να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού που σχηματίζεται από τη σφαίρα $\rho = a$ και τον κώνο $\phi = b$ (οι σχέσεις αναφέρονται σε σφαιρικές συντεταγμένες).

Απάντηση:

Το στερεό περιγράφεται από τις σχέσεις σε σφαιρικές συντεταγμένες: $0 \leq \rho \leq a$,

$0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq \phi \leq b$. Το αποτέλεσμα είναι $\frac{2\pi a^3(1 - \cos b)}{3}$.

(5) Να υπολογιστεί το τριπλό ολοκλήρωμα της $f(x, y, z) = \exp(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}$ στη μοναδιαία σφαίρα με κέντρο την αρχή των αξόνων.

Απάντηση:

Χρησιμοποιείτε σφαιρικές συντεταγμένες. Το αποτέλεσμα είναι $\frac{4\pi}{3}(e - 1)$.

(6) Να υπολογιστεί η μάζα της κωνικής στερεάς περιοχής που ορίζεται από την ανισότητα $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1$ όταν η συνάρτηση πυκνότητας είναι $f(x, y, z) = (1 + \sqrt{x^2 + y^2})$.

Απάντηση:

Χρησιμοποιείτε κυλινδρικές συντεταγμένες. Το αποτέλεσμα είναι $\pi/2$.

7. Επικαμπύλια και επιφανειακά ολοκληρώματα

(1) Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της συνάρτησης $f(x, y, z) = x - z$ στο τόξο της έλικας $c : \vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$ από το σημείο $(1, 0, 0)$ μέχρι $(0, 1, \pi/2)$.

Απάντηση:

$$\sqrt{2} \left(1 - \frac{\pi^2}{8} \right)$$

(2) Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της συνάρτησης $f(x, y) = x^3 + xy$ στο τόξο της καμπύλης $y = x^2$ με άκρα $(0, 0)$ και $(2, 4)$.

Απάντηση:

Εκφράστε παραμετρικά την καμπύλη $c : \vec{r}(t) = (t, t^2)$, $t \in [0, 2]$. Το αποτέλεσμα είναι $\frac{1 + 391\sqrt{17}}{60}$

(3) Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της συνάρτησης $f(x, y) = \frac{1}{x - y}$ στο ευθύγραμμο τμήμα με άκρα $(0, -2)$ και $(4, 0)$.

Απάντηση:

Εκφράστε παραμετρικά το ευθύγραμμο τμήμα $c : \vec{r}(t) = \left(t, \frac{t}{2} - 2 \right)$, $t \in [0, 4]$.

Αποτέλεσμα: $\sqrt{5} \ln 2$.

(4) Να βρεθεί η μέση τιμή της συνάρτησης $f(x, y) = x + y^2$ κατά μήκος του ευθύγραμμου τμήματος με άκρα $(0, 0)$ και $(1, 1)$ και σε ποιο σημείο πετυχαίνεται αυτή.

Απάντηση:

Εκφράστε παραμετρικά το ευθύγραμμο τμήμα $c: \vec{r}(t) = (t, t)$, $t \in [0, 1]$. Η μέση τιμή είναι $5/6$. Λύνοντας την εξίσωση $t + t^2 = 5/6$ βρίσκουμε ότι το σημείο στο οποίο πετυχαίνεται είναι $\left(\frac{-1 + \sqrt{13/3}}{2}, \frac{-1 + \sqrt{13/3}}{2} \right)$.

(5) Να υπολογιστεί η μάζα και το κέντρο μάζας της καμπύλης $c: \vec{r}(t) = (a \cos t, 0, a \sin t)$, $t \in [0, \pi/2]$ όταν η συνάρτηση πυκνότητας είναι $f(x, y, z) = xz^2$.

Απάντηση:

Η μάζα είναι $a^4/3$ και κέντρο μάζας το σημείο $(3\pi a/16, 0, 3a/4)$

(6) Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της $f(x, y, z) = \frac{x+y}{y+z}$ πάνω στην καμπύλη $c: \vec{r}(t) = (t, \frac{2}{3}t^{3/2}, t)$, $t \in [1, 2]$.

Απάντηση:

$$16 - 2\sqrt{3}$$

(7) Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της συνάρτησης $f(x, y) = x^2 + y^2$ πάνω σε κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα a .

Απάντηση:

$$2\pi a^3$$

(8) Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του διανυσματικού πεδίου

$$\vec{F}(x, y, z) = (xy, xz, -y)$$

πάνω στην καμπύλη c που αποτελείται από τα δύο ευθύγραμμα τμήματα AB και $B\Gamma$ όπου $A=(1,0,0)$, $B=(0,1,0)$ και $\Gamma=(0,1,1)$.

Απάντηση:

Εκφράστε παραμετρικά τα ευθύγραμμα τμήματα AB ως $c_1: \vec{r}(t) = (t, 1-t, 0)$, $t_1 = 1$, $t_2 = 0$ και $B\Gamma$ ως $c_2: \vec{r}(t) = (0, 1, t)$, $t_1 = 0$, $t_2 = 1$. Προσθέστε τα δύο επικαμπύλια ολοκληρώματα. Αποτέλεσμα: $-7/6$

(9) Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του διανυσματικού πεδίου

$$\vec{F}(x, y) = \left(\frac{1}{xy^2}, \frac{1}{x^2y} \right)$$

πάνω στην καμπύλη $c: \vec{r}(t) = (\sqrt{t}, \sqrt{1+t})$ από $(1, \sqrt{2})$ έως $(2, \sqrt{5})$.

Απάντηση:

$\ln(8/5)$

(10) Να υπολογιστεί το έργο που παράγει το πεδίο δυνάμεων $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ για να κινηθεί ένα σωματίδιο κατά μήκος της παραβολής $y = x^2$, $z = 0$ από $x = -1$ μέχρι $x = 2$.

Απάντηση:

Θέτουμε $x = t$. Αποτέλεσμα: 9

(11) Να υπολογιστεί το έργο που παράγει το πεδίο δυνάμεων $\vec{F}(x, y, z) = (xy, yz, xz)$ όταν μετατοπίζει το σημείο εφαρμογής του από το σημείο $(-1, 1, -1)$ στο $(1, 1, 1)$ κατά μήκος της καμπύλης $c: \vec{r}(t) = (t, t^2, t^3)$.

Απάντηση:

10/7

(12) Να υπολογιστεί το έργο που παράγει το πεδίο δυνάμεων $\vec{F}(x, y, z) = (e^x, e^z, xyz)$ όταν μετατοπίζει το σημείο εφαρμογής της από το $A=(1,0,0)$ στο $B=(0,1,1)$ (α) κατά μήκος του ευθύγραμμου τμήματος AB και (β) κατά μήκος της καμπύλης που ορίζεται σαν τομή των επιφανειών $y = z$ και $2x + y^2 + z^2 = 2$.

Απάντηση:

(α) Η παραμετρική εξίσωση της ευθείας είναι $\vec{r}(t) = (1-t, t, t)$ και το έργο $1/12$.

(β) Η παραμετρική εξίσωση της καμπύλης είναι $\vec{r}(t) = (1-t^2, t, t)$ και το έργο $2/15$.

(13) Να δείξετε ότι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του διανυσματικού πεδίου $\vec{F}(x, y) = \left(\frac{y}{x^2 + y^2}, -\frac{x}{x^2 + y^2} \right)$ είναι ανεξάρτητο δρόμου. Σαν επαλήθευση, υπολογίστε το ολοκλήρωμα (με τον τύπο του επικαμπύλιου ολοκληρώματος) πάνω στο τόξο του κύκλου $x^2 + y^2 = 1$ από $A=(1,0)$ έως $B=(0,1)$ και πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα AB . Στη συνέχεια, βρείτε την συνάρτηση $f(x, y, z)$ της οποίας η κλίση είναι το δεδομένο διανυσματικό πεδίο και υπολογίστε τα προηγούμενα ολοκληρώματα μόνο από τα σημεία A και B .

Απάντηση:

Τα δύο ολοκληρώματα είναι ίσα με $-\pi/2$. Η ζητούμενη συνάρτηση είναι η $f(x, y, z) = \arctan(x/y)$ ($\arctan = \text{τοξεφ}$).

(14) Να δειχτεί ότι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του διανυσματικού πεδίου $\vec{F}(x, y, z) = (6xy^2 - y^3, 6x^2y - 3xy^2)$ είναι ανεξάρτητο του δρόμου που ενώνει τα σημεία $A=(1,2)$ και $B=(3,4)$ και στη συνέχεια να υπολογιστεί η τιμή του.

Απάντηση:

Για τον υπολογισμό θεωρούμε οποιονδήποτε δρόμο από A μέχρι B . Το ζητούμενο είναι 236.

(15) Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του διανυσματικού πεδίου $\vec{F}(x, y, z) = (2x^2 - y^3, x^3 + y^3)$ πάνω στον μοναδιαίο κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων χρησιμοποιώντας τον τύπο του Green.

Απάντηση:

$$3\pi / 2$$

(16) Να υπολογιστεί η διαφορά $I_2 - I_1$ όπου

$$I_1 = \int_{c_1} (x+y)^2 dx - (x-y)^2 dy \quad \text{και} \quad I_2 = \int_{c_2} (x+y)^2 dx - (x-y)^2 dy$$

ενώ c_1 είναι το ευθύγραμμο τμήμα AB, $A=(0,0)$ και $B=(1,1)$ και c_2 το τόξο της παραβολής $y = x^2$ με άκρα τα A και B.

Απάντηση:

Θεωρείστε την κλειστή καμπύλη c που αποτελείται από το τόξο AB και το ευθύγραμμο τμήμα BA. Η ζητούμενη διαφορά είναι ίση με το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα πάνω στην c το οποίο υπολογίζεται από τον τύπο του Green σαν διπλό ολοκλήρωμα πάνω από την περιοχή που ορίζεται από τις σχέσεις $0 \leq x \leq 1$ και $x^2 \leq y \leq x$. Το αποτέλεσμα είναι $-1/3$.

(17) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα του διανυσματικού πεδίου

$$\vec{F}(x, y, z) = (x^2 y \cos x + 2xy \sin x - y^2 e^x, x^2 \sin x - 2ye^x)$$

πάνω στην κλειστή καμπύλη (αστεροειδής καμπύλη) που ορίζεται από την εξίσωση $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

Απάντηση:

Χρησιμοποιείτε τον τύπο του Green. Το αποτέλεσμα είναι 0.

(18) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα του διανυσματικού πεδίου $\vec{F}(x, y) = (y^3, -x^3)$ πάνω στην περίμετρο του τετραγώνου με εξίσωση $|x| + |y| = 1$.

Απάντηση:

Το τετράγωνο σχηματίζεται από τις ευθείες $x + y = 1$, $-x + y = 1$, $x - y = 1$, $-x - y = 1$. Μπορεί να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα από τον τύπο του επικαμπύλιου.

Η πλέον απλή λύση είναι η χρήση του τύπου του Green. Απλά χωρίστε την περιοχή ολοκλήρωσης σε δύο μικρότερες και πάρτε διαδοχικά ολοκληρώματα.

Αποτέλεσμα: -2

(19) Έστω S η επιφάνεια που ορίζεται από την $z = x^2 + y^2$ πάνω από την ορθογώνια περιοχή D η οποία ορίζεται από τις σχέσεις $0 \leq x \leq 1$ και $-1 \leq y \leq 1$. Να υπολογιστεί το επιφανειακό ολοκλήρωμα της $f(x, y, z) = x$ πάνω στην επιφάνεια S .

Απάντηση:

$$\sqrt{6} - \frac{\sqrt{2}}{3}$$

(20) Να βρεθεί το εμβαδόν του παραβολοειδούς $z = x^2 + y^2$ που βρίσκεται μέσα στον κύλινδρο $x^2 + y^2 = a^2$.

Απάντηση:

Υπολογίστε το επιφανειακό ολοκλήρωμα από τη σχέση $\iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy$

όπου η D είναι ο δίσκος $x^2 + y^2 \leq a^2$. Με αλλαγή σε πολικές συντεταγμένες προκύπτει $\frac{\pi}{6} (1 + 4a^2) - 1$.

(21) Έστω S η επιφάνεια του ημισφαιρίου $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$. Να υπολογιστεί το επιφανειακό ολοκλήρωμα της $f(x, y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ πάνω στην S .

Απάντηση:

Η περιοχή ολοκλήρωσης είναι ο δίσκος $x^2 + y^2 \leq a^2$. Με αλλαγή σε πολικές συντεταγμένες παίρνουμε αποτέλεσμα πa^3 .

(22) Να βρεθεί το εμβαδόν του παραβολοειδούς $z = 2 - (x^2 + y^2)$ που βρίσκεται προς τα θετικά z .

Απάντηση:

$13\pi/3$

(23) Να υπολογιστεί το επιφανειακό ολοκλήρωμα της συνάρτησης $f(x, y) = x^2 + y^2$ πάνω στην επιφάνεια S του κώνου με εξίσωση $z^2 = 3(x^2 + y^2)$ που περιλαμβάνεται ανάμεσα στα επίπεδα $z = 0$ και $z = 3$.

Απάντηση:

Η εξίσωση της δεδομένης επιφάνειας είναι $z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$. Με εφαρμογή του τύπου υπολογίζουμε το διπλό ολοκλήρωμα πάνω από την περιοχή $x^2 + y^2 \leq 3$.

Αποτέλεσμα: 9π

(24) Να υπολογιστεί το εμβαδόν της επιφάνειας του τόρου

$$\vec{\Phi}(u, v) = ((b + a \sin u) \cos v, (b + a \sin u) \sin v, a \cos u)$$

όπου $0 \leq u, v < 2\pi$.

Απάντηση:

$4\pi^2 ab$

(25) Να υπολογιστεί το επιφανειακό ολοκλήρωμα του διανυσματικού πεδίου

$$\vec{F}(x, y, z) = (2xz, yz, -4z^2)$$

πάνω στην επιφάνεια S του κύβου που ορίζεται από τα επίπεδα $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$, $y = 2$, $z = 0$, $z = 2$.

Απάντηση:

Χρησιμοποιείτε το θεώρημα απόκλισης του Gauss. Αποτέλεσμα: -40

(26) Να υπολογιστεί το επιφανειακό ολοκλήρωμα του διανυσματικού πεδίου

$$\vec{F}(x, y, z) = (xy^2, x^2y, y)$$

στην επιφάνεια S του κυλίνδρου $x^2 + y^2 = 1$ που φράσσεται από τα επίπεδα $z = 1$ και $z = -1$ μαζί με τους δύο δίσκους (βάσεις) $x^2 + y^2 \leq 1$ για $z = \pm 1$.

Απάντηση:

Χρησιμοποιείτε το θεώρημα απόκλισης του Gauss. Για την τριπλή ολοκλήρωση μετατρέψτε σε κυλινδρικές συντεταγμένες. Η τιμή του ολοκληρώματος είναι π .

(27) Να υπολογιστεί το επιφανειακό ολοκλήρωμα του διανυσματικού πεδίου

$$\vec{F}(x, y, z) = (0, y, z) \text{ στην επιφάνεια } z = 4 - x^2 - y^2 \text{ προς τα θετικά } z.$$

Απάντηση:

Η επιφάνεια ορίζεται παραμετρικά $(u, v, 4 - u^2 - v^2)$. Τα δύο εφαπτόμενα διανύσματα είναι $(1, 0, -2u)$ και $(0, 1, -2v)$. Το ολοκλήρωμα που πρέπει να υπολογίσουμε τελικά είναι το $\iint_D (4 - u^2 + v^2) du dv$ όπου η D είναι ο δίσκος $u^2 + v^2 \leq 4$. Με αλλαγή σε πολικές συντεταγμένες προκύπτει 16π .

(28) Να υπολογιστεί το επιφανειακό ολοκλήρωμα του διανυσματικού πεδίου

$$\vec{F}(x, y, z) = (2x - z, x^2y, -xz^2)$$

στην επιφάνεια S του κύβου $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$.

Απάντηση:

Εφαρμόστε το θεώρημα απόκλισης. Αποτέλεσμα $11/6$.

(29) Να υπολογιστεί το επιφανειακό ολοκλήρωμα του διανυσματικού πεδίου

$$\vec{F}(x, y, z) = (xy, yz, xz)$$

στην επιφάνεια S του τετράεδρου που φράσσεται από τα επίπεδα $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ και $x + y + z = 1$.

Απάντηση:

1/8

(30) Να εφαρμόσετε το θεώρημα του Stokes για να υπολογίσετε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του διανυσματικού πεδίου $\vec{F}(x, y, z) = (x^2 y^3, 1, z)$ πάνω στον κύκλο $x^2 + y^2 = a^2$, θεωρώντας σαν επιφάνεια S το ημισφαίριο $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$.

Απάντηση:

$$-\frac{a^6 \pi}{8}$$